Centro Universitário de Belo Horizonte - UniBH
Graduação em Engenharia Elétrica

Uso de fasores para resolução de circuitos elétricos

Philipe Cesar Teixeira Pereira

Belo Horizonte, abril de 2020

Sumário

1 Introdução **2**

2 Conceitos básicos de circuitos elétricos **3**

2.1 Circuitos elétricos lineares 3
2.2 Elementos básicos de circuito 4
2.2.1 Fonte de tensão 4
2.2.2 Fonte de corrente 4
2.2.3 Resistor 5
2.2.4 Indutor 5
2.2.5 Capacitor 6
2.3 Análise de circuitos elétricos com tensões e correntes contínuas 8
2.3.1 Circuito resistivo 8
2.3.2 Circuito capacitivo 8
2.3.3 Circuito indutivo 9
2.4 Análise de circuitos elétricos com tensões e correntes alternadas cossenoidais 9
2.4.1 Circuito resistivo 10
2.4.2 Circuito capacitivo 10
2.4.3 Circuito indutivo 13
2.4.4 Circuito RL 13
2.5 Regime transitório e regime permanente senoidal (RPS) 16

3 Uso de grandezas fasoriais **18**

3.1 Origem 18
3.2 Definição 19
3.3 Relações de tensão e corrente nos elementos de circuito 19
3.3.1 Resistor 20
3.3.2 Capacitor 20
3.3.3 Indutor 21
3.3.4 Obtenção da resposta em RPS utilizando fasores 23
3.4 Conceito de indutância e admitância complexas 25

1 Introdução

Os sistemas elétricos de potência trabalham com tensões e correntes alternadas, o que significa que essas grandezas, ao serem medidas num dado ponto, variam senoidalmente no tempo numa dada frequência (que pode ser de $60Hz$ no Brasil e nos Estados Unidos ou $50Hz$ na Europa).

A resolução de circuitos elétricos com grandezas que variam no tempo difere significativamente de quando tais grandezas são contínuas. Assim como será mostrado a seguir, certos elementos (como indutores e capacitores) apresentam tensões ou correntes em seus terminais que dependem da *taxa de variação* dessas grandezas. Em particular, quando a variação dessas grandezas no tempo é senoidal, as taxas de variação também serão senoidais e de mesma frequência. Isso se deve ao fato de que as derivadas das funções seno e cosseno são cossenos e senos de mesma frequência angular:

$$\frac{d}{dt}\cos(bt) = -b\sin(bt) \tag{1}$$

A função $\sin(bt)$ pode ser escrita como $\cos(bt - 90°)$ (ou seja, o seno é um cosseno *atrasado* de $90°$). Tem-se também que $-b\sin(bt) = b\sin(-bt)$ (pelo fato de a função seno ser ímpar), logo $b\sin(-bt) = b\cos(-bt - 90°) = b\cos(bt + 90°)$ (essa última igualdade se deve ao fato de que a função cosseno é par). Logo:

$$\frac{d}{dt}\cos(bt) = b\cos(bt + 90°) \tag{2}$$

A equação 2 mostra uma relação muito importante: a derivada de uma função cossenoidal é também uma função cossenoidal, porém *adiantada* de $90°$ (ou $\frac{\pi}{2}rad$) e multiplicada por um fator igual ao da frequência angular.

Nas próximas seções, faremos um estudo do comportamento dos circuitos elétricos quando submetidos a tensões e correntes alternadas cossenoidais, nos atendo principalmente ao seu comportamento após os instantes iniciais, quando o sistema entra em um regime de operação permanente, com as grandezas estabelecidas.

2 Conceitos básicos de circuitos elétricos

Num primeiro momento, será feita uma revisão de alguns conceitos de circuitos elétricos, com a apresentação dos elementos lineares que são utilizados na modelagem de sistema elétricos.

2.1 Circuitos elétricos lineares

Inicialmente, faz-se necessário introduzir o conceito de elementos de circuito lineares. Um elemento de circuito é linear quando a relação entre as grandezas elétricas em seus terminais (tensão e corrente) atendem aos critérios de linearidade, a saber:

1. Aditividade: $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. Homogeneidade: $f(ax) = af(x)$;

Como exemplo de elemento linear, pode-se citar o resistor de resistência constante R.

A relação entre a tensão e a corrente em seus terminais é dada pela lei de Ohm:

$$i = \frac{v}{R} \tag{3}$$

É fácil demonstrar que este elemento é linear: ao se associar em série dois geradores de tensão de v_1 e v_2, a corrente que circula pelo resistor i_R é igual à soma das correntes $i_1 = \frac{v_1}{R}$ e $i_2 = \frac{v_2}{R}$ (critério de aditividade). Ao se multiplicar a tensão nos terminais do resistor por um fator α, a corrente i também é multiplicada por α (critério de homogeneidade).

Como exemplo de elemento não-linear de um circuito elétrico, pode-se citar o diodo. A relação entre a tensão e a corrente em seus terminais é dada por:

$$i = I_S \left[\exp\left(\frac{v}{nV_T}\right) - 1 \right] \tag{4}$$

Ao se multiplicar a tensão nos terminais do resistor por um fator α, a corrente i nos terminais não será igual a αi, logo o critério de homogeneidade não é cumprido, o que significa que o diodo não é um elemento linear.

No que se segue, serão trabalhados apenas circuitos que possuem elementos lineares. Essa condição é importante para as análises que se seguirão. Isso pois quando o circuito é composto por elementos lineares, tem-se que:

- é possível aplicar o princípio da superposição em sua análise (i.e., um circuito com duas ou mais excitações pode ser solucionado como a soma dos efeitos das excitações tomadas individualmente);
- as excitações senoidais em uma dada frequência podem ser analisadas independentemente das demais frequências que também possam estar presentes (i.e., pode-se analisar os efeitos no circuito das excitações na frequência de $60Hz$, e essa análise não será perturbada pela presença de componentes em outras frequências, e.g., harmônicas de ordem superior, como 120 ou $180Hz$).

2.2 Elementos básicos de circuito

Abaixo serão listados alguns bipolos (i.e., elementos de circuito com dois terminais) e a relação entre a tensão e a corrente em seus terminais.

2.2.1 Fonte de tensão

Uma fonte (ou gerador) de tensão (cujo símbolo está indicado na figura 1) é bipolo que faz com que a tensão em seus terminais seja igual a um valor dado, que pode ser uma função no tempo. A corrente nos terminais (e, por consequência, a potência entregue - ou absorvida) dependerá do resto do circuito ao qual ele está conectado.

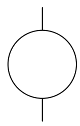

Figura 1: Símbolo da fonte de tensão ideal.

Uma fonte de tensão nunca pode ser curto-circuitada (pois, se isso for feito, a corrente pelo curto seria infinita). No entanto, não há problemas em deixar os terminais em aberto.

2.2.2 Fonte de corrente

Uma fonte (ou gerador) de corrente (cujo símbolo está indicado na figura 2) é bipolo que faz com que a corrente em seus terminais seja igual a um valor dado, que pode ser uma função no tempo. A tensão nos terminais (e, por consequência, a potência entregue - ou absorvida) dependerá do resto do circuito ao qual ele está conectado.

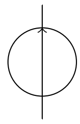

Figura 2: Símbolo da fonte de corrente ideal.

Uma fonte de corrente nunca pode ser deixado em aberto (pois, se isso for feito, ele não terá meios de estabelecer a corrente que foi designado para gerar). No entanto, não há problemas em deixar os terminais curto-circuitados.

2.2.3 Resistor

Um resistor ideal (cujo símbolo está indicado figura 3) é um elemento de circuito que estabelece uma relação de proporção entre a corrente e a tensão em seus terminais, relação essa que já foi apresentada na equação 3. O resistor é caracterizado pelo valor da sua resistência R, dada em Ohm (Ω).

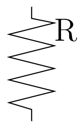

Figura 3: Símbolo do resistor

Toda a potência elétrica que é absorvida pela resistor é dissipada (i.e., ele não armazena energia).

2.2.4 Indutor

Um indutor ideal (cujo símbolo está indicado figura 4) é um elemento de circuito que estabelece um fluxo magnético concatenado λ a partir da corrente i em seus terminais. A relação entre o fluxo e a corrente é feita pelo valor da indutância do elemento, dada em Henry (H).

Figura 4: Símbolo do indutor

$$\lambda = Li \qquad (5)$$

Pela lei de Faraday, a variação do fluxo concatenado é igual à tensão induzida nos terminais do circuito concatenado. Logo:

$$v(t) = L\frac{di}{dt}(t) \tag{6}$$

Devido ao fato de que a derivação é uma operação linear, elemento de circuito é linear. A corrente nos terminais do indutor é dada pela expressão:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt \tag{7}$$

Esta fórmula diz que a corrente no indutor num dado instante de tempo não pode ser conhecida se não se conhecer todo o seu *passado*.

Pelo fato de que o comportamento do indutor depender do seu passado, ele sempre estará associado à variável de estado que é a sua corrente num dado instante e, sempre quando houver um problema de circuito elétrico, deve-se indicar o valor da corrente no instante inicial de tempo da análise i_0.

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t)dt + i_0 \tag{8}$$

Se a corrente do indutor variar abruptamente (e.g., abrir-se o circuito de um indutor, zerando-se assim sua corrente), tem-se $\frac{di}{dt} = \pm\infty$, ou seja, a tensão induzida será de intensidade muito elevada. Assim, diz-se que o indutor tem uma *inércia* da corrente (i.e., sua corrente varia da maneira mais *contínua* possível).

A potência absorvida pelo indutor fica armazenada no campo magnético estabelecido, sendo que num momento posterior essa energia pode ser devolvida ao circuito.

2.2.5 Capacitor

Um capacitor ideal (cujo símbolo está indicado figura 5) é um elemento de circuito que estabelece um campo elétrico a partir da tensão v em seus terminais. Esse campo elétrico é induzido por cargas elétricas estáticas q. A relação entre as cargas e a tensão é feita pelo valor da capacitância do elemento, dada em Farad (F).

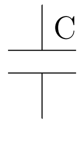

Figura 5: Símbolo do capacitor

$$q = Cv \tag{9}$$

Uma vez que a corrente elétrica é a variação das cargas no tempo, $i = \frac{dq}{dt}$, tem-se:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}(t) \tag{10}$$

Devido ao fato de que a derivação é uma operação linear, elemento de circuito é linear. A tensão nos terminais do capacitor é dada pela expressão:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt \tag{11}$$

Esta fórmula diz que a tensão no capacitor num dado instante de tempo não pode ser conhecida se não se conhecer todo o seu *passado*.

Pelo fato de que o comportamento do capacitor depender do seu passado, ele sempre estará associado à variável de estado que é a sua tensão num dado instante e, sempre quando houver um problema de circuito elétrico, deve-se indicar o valor da tensão no instante inicial de tempo da análise v_0.

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt + v_0 \tag{12}$$

Se a tensão no capacitor variar abruptamente (e.g., curto-circuitando-se seus terminais, forçando-se, assim, a tensão em seus terminais a ser zero), tem-se $\frac{dv}{dt} = \pm\infty$, ou seja, a corrente será de intensidade muito elevada. Assim, diz-se que o capacitor tem uma *inércia* de tensão (i.e., sua tensão varia da maneira mais *contínua* possível).

A potência absorvida pelo capacitor fica armazenada no campo elétrico estabelecido, sendo que num momento posterior essa energia pode ser devolvida ao circuito.

Dualidade

Um leitor atento percebeu que os textos das seções acima (fonte de tensão/fonte de corrente; indutor/capacitor) são muito parecidos: na verdade, onde um texto diz corrente, o outro diz tensão; onde um texto diz magnético, o outro elétrico; onde um texto diz derivada, o outro diz integral.

Essa relação espelhada entre os elementos é chamada de *dualidade*, e é importante conhecer essa simetria nas relações para se compreender certos aspectos dos circuitos elétricos.

2.3 Análise de circuitos elétricos com tensões e correntes contínuas

Nesta seção, será feita uma análise de alguns circuitos elétricos lineares excitados com fontes de tensão e corrente contínuas, ou seja, fontes que mantém a tensão ou a corrente em seus terminais em um dado valor.

Essa análise (principalmente para o circuito resistivo) já deve ser familiar ao leitor e será apresentada aqui unicamente com o intuito de se estabelecer uma comparação entre a análise em regime contínuo e a análise em regime senoidal.

2.3.1 Circuito resistivo

Seja o circuito da figura 6, onde uma fonte de tensão contínua de $100V$ está conectada a um resistor, cuja resistência é de 5Ω.

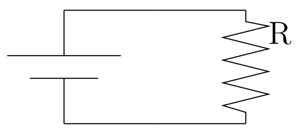

Figura 6: Circuito resistivo sendo excitado por uma fonte de tensão contńua.

Pela lei de Ohm, tem-se que:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{100V}{5\Omega} = 20A$$

Assim, a corrente na resistência será constante e igual a 20 A.

2.3.2 Circuito capacitivo

Seja o circuito da figura 7, onde uma fonte de tensão contínua de $100V$ está conectada a um capacitor, cuja capacitância é de $5mF$. Assim como foi mencionado na seção 2.2.5, deve-se informar o valor da tensão inicial no capacitor, que nesse caso será considerada igual à do gerador, ou seja $v_0 = 100V$.

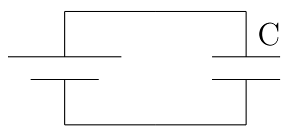

Figura 7: Circuito capacitivo sendo excitado por uma fonte de tensão contínua.

A equação 10 dá o valor da corrente no capacitor:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}(t)$$

Se a tensão inicial é igual ao do gerador, e se tensão do gerador é contínua, então não há em momento algum variação de tensão $\frac{dv}{dt}$, logo a corrente no capacitor será nula $i(t) = 0$. Assim, um capacitor já carregado e conectado à uma fonte de tensão é, para todos os efeitos, equivalente à um circuito em aberto.

2.3.3 Circuito indutivo

Seja o circuito da figura 8, onde uma fonte de corrente contínua de $20A$ está conectada a um indutor, cuja indutância é de $5mH$. Assim como foi mencionado na seção 2.2.4, deve-se informar o valor da corrente inicial no indutor, que nesse caso será considerada igual à do gerador, ou seja $i_0 = 20A$.

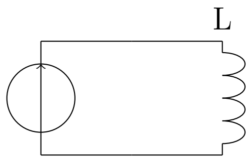

Figura 8: Circuito indutivo sendo excitado por uma fonte de corrente contínua.

A equação 6 dá o valor da tensão no indutor:

$$v(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

Se a corrente inicial é igual à do gerador, e se corrente do gerador é contínua, então não há em momento algum variação de corrente $\frac{di}{dt}$, logo a tensão no indutor será nula $v(t) = 0$. Assim, um indutor com corrente conectado à uma fonte de corrente é, para todos os efeitos, equivalente à um curto-circuito.

2.4 Análise de circuitos elétricos com tensões e correntes alternadas cossenoidais

Será feito agora a mesma análise da seção anterior, porém agora com fontes de tensão e corrente senoidais.

Para resolver os problemas abaixo, serão utilizadas técnicas de resolução de equações diferenciais que talvez o leitor ainda não tenha aprendido. Se for esse o caso, não há problema algum: a ideia aqui será a de apresentar como seria a resolução de problemas de circuitos elétricos lineares sem o uso de fasores, o que se mostra uma tarefa trabalhosa, justificando assim o seu uso. Assim, o leitor não precisa se ater aos detalhes da resolução.

2.4.1 Circuito resistivo

Seja o circuito da figura 9, onde uma fonte de tensão cossenoidal de $v(t) = 100\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°)\,V$ está conectada a um resistor, cuja resistência é de 5Ω.

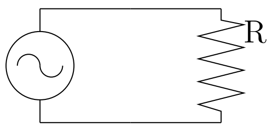

Figura 9: Circuito resistivo sendo excitado por uma fonte de tensão alternada.

Pela lei de Ohm, tem-se que:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{100\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°)\,V}{5\Omega} = 20\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°)\,A$$

Assim, ao se conectar a uma resistência uma fonte de tensão cossenoidal de $100V_{ef}$ ($100\sqrt{2}V$ de pico), estabelece-se uma corrente na resistência igual a $20A_{ef}$ ($20\sqrt{2}V$ de pico). A corrente e a tensão estão **em fase** (i.e., as ondas de tensão e corrente tem a mesma desafagem angular de 30°) assim como ilustrado na figura 10.

2.4.2 Circuito capacitivo

Seja o circuito da figura 11, onde uma fonte de tensão cossenoidal de $v(t) = 100\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°)\,V$ está conectada a um capacitor, cuja capacitância é de $5mF$. A tensão inicial no capacitor é $v_0 = 50\sqrt{6}V$ (ou seja, igual à tensão no gerador no instante $t = 0$, de modo que não há um degrau na tensão).

A equação 10 dá o valor da corrente no capacitor:

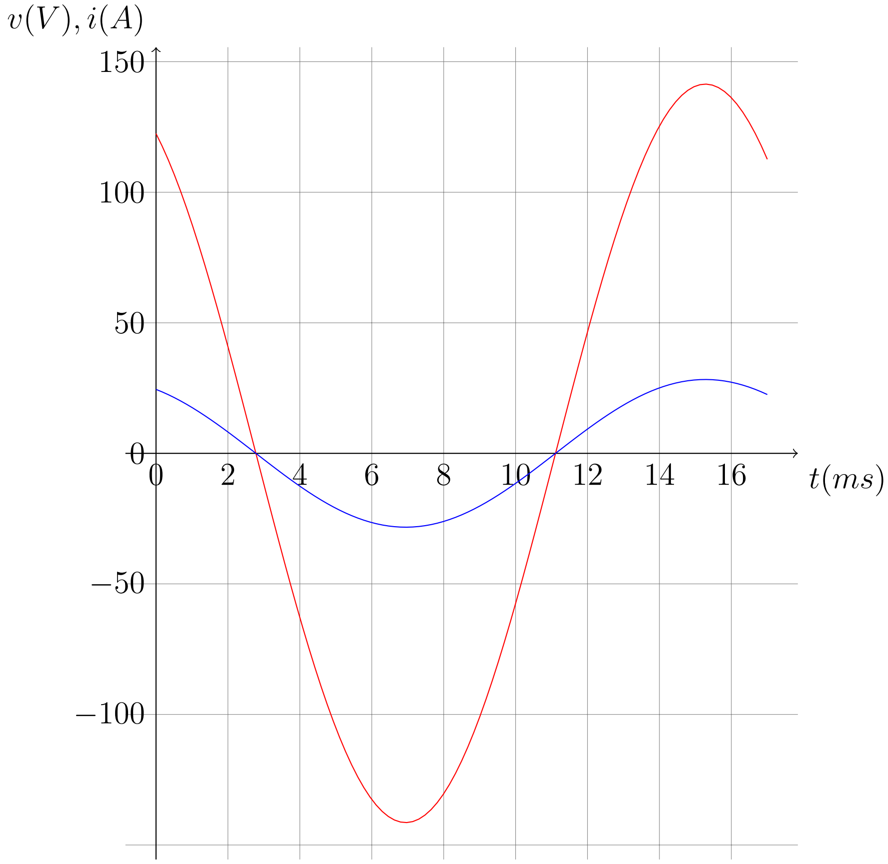

Figura 10: Corrente (azul) e tensão (vermelho) nos terminais do resistor.

$$
\begin{aligned}
i(t) &= C\frac{dv}{dt}(t) \\
&= 5.10^{-3}F.\frac{d}{dt}100\sqrt{2}\cos\left(2\pi 60t + 30^\circ\right) \\
&= 0,5\sqrt{2}.2\pi 60.(-1).\sin\left(2\pi 60t + 30^\circ\right) \\
&= 60\pi\sqrt{2}\sin\left(-2\pi 60t - 30^\circ\right)
\end{aligned}
$$

Sendo $\sin(a) = \cos(a - 90^\circ)$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= 60\pi\sqrt{2}\cos\left(-2\pi 60t - 30^\circ - 90^\circ\right) \\
&= 60\pi\sqrt{2}\cos\left(-2\pi 60t - 120^\circ\right) \\
&= 60\pi\sqrt{2}\cos\left(2\pi 60t + 120^\circ\right)
\end{aligned}
$$

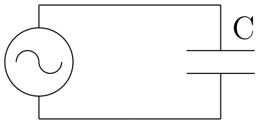

Figura 11: Circuito capacitivo sendo excitado por uma fonte de tensão alternada.

Assim, ao se conectar a um capacitor uma fonte de tensão cossenoidal de $100V_{ef}$ ($100\sqrt{2}V$ de pico), estabelece-se uma corrente no capacitor igual a $60\pi A_{ef}$ ($60\pi\sqrt{2}A$ de pico). A corrente está **adiantada** de 90° em relação à tensão, assim como ilustrado na figura 12.

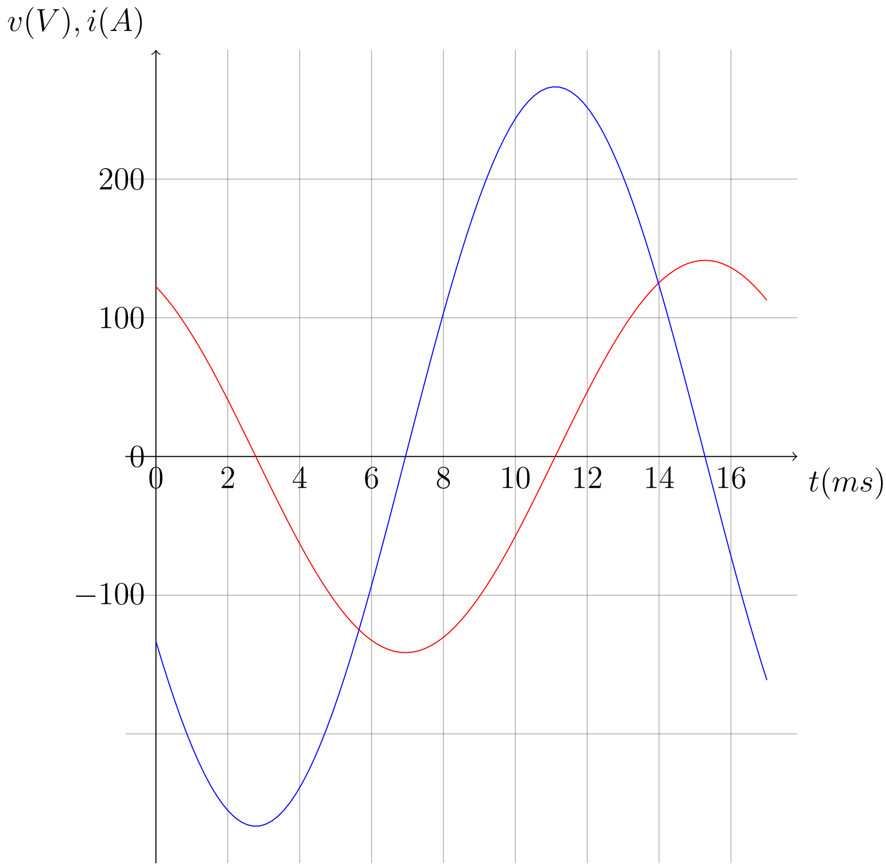

Figura 12: Corrente (azul) e tensão (vermelho) nos terminais do capacitor.

2.4.3 Circuito indutivo

Seja o circuito da figura 13, onde uma fonte de corrente cossenoidal de $i(t) = 20\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°)\,A$ está conectada a um indutor, cuja indutância é de $5mH$. A corrente inicial no indutor é $i_0 = 10\sqrt{6}A$ (ou seja, igual à corrente no gerador no instante $t = 0$, de modo que não há um degrau na corrente).

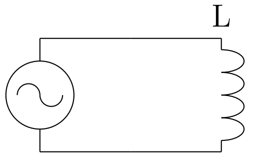

Figura 13: Circuito indutivo sendo excitado por uma fonte de corrente alternada.

A equação 6 dá o valor da tensão no indutor:

$$\begin{aligned} v(t) &= L\frac{di}{dt}(t) \\ &= 5.10^{-3}H.\frac{d}{dt}20\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°) \\ &= 0,1\sqrt{2}.2\pi 60.(-1).\sin(2\pi 60t + 30°) \\ &= 12\pi\sqrt{2}\sin(-2\pi 60t - 30°) \end{aligned}$$

Sendo $\sin(a) = \cos(a - 90°)$, tem-se:

$$\begin{aligned} v(t) &= 12\pi\sqrt{2}\cos(-2\pi 60t - 30° - 90°) \\ &= 12\pi\sqrt{2}\cos(-2\pi 60t - 120°) \\ &= 12\pi\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 120°) \end{aligned}$$

Assim, ao se conectar a um indutor uma fonte de corrente cossenoidal de $20A_{ef}$ ($20\sqrt{2}A$ de pico), estabelece-se uma tensão nos terminais do indutor igual a $12\pi V_{ef}$ ($12\pi\sqrt{2}V$ de pico). A corrente está **atrasada** de 90° em relação à tensão, assim como ilustrado na figura 14.

2.4.4 Circuito RL

Seja o circuito da figura 15, onde uma fonte de tensão cossenoidal de $v(t) = 100\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°)\,V$ está conectada a um indutor, cuja indutância é de $5mH$, em série com um resistor, cuja resistência é de 5Ω. A corrente inicial no indutor é $i_0 = 0A$.

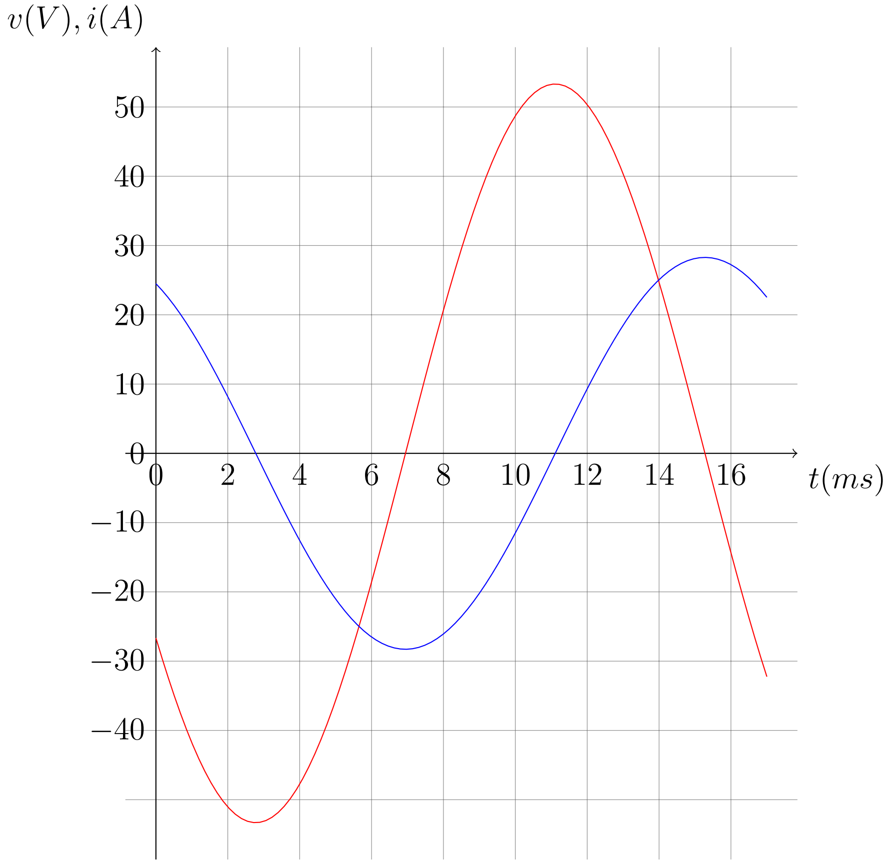

Figura 14: Corrente (azul) e tensão (vermelho) nos terminais do indutor.

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_R(t) + v_L(t) \\
&= Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t)
\end{aligned}
$$

Substituindo os valores, tem-se:

$$100\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°) = 5i(t) + 5.10^{-3}\frac{di}{dt}(t)$$

$$\frac{di}{dt}(t) + 1000i(t) = 20000\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30°) \tag{13}$$

A equação 13 é uma equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem. A solução homogênea (i.e., zerando o termo da direita de 13) é dada por:

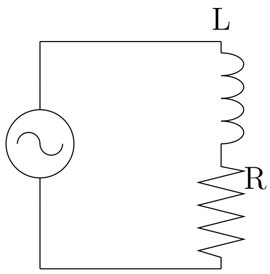

Figura 15: Circuito RL série sendo excitado por uma fonte de tensão alternada.

$$\frac{di}{dt}(t) + 1000i(t) = 0 \rightarrow i(t) = I_0 \exp(-1000t)$$

A solução particular da equação pode ser obtida pelo método dos coeficientes a determinar, que diz que deve-se procurar uma solução na forma:

$$i_P(t) = A\cos(2\pi 60t) + B\sin(2\pi 60t)$$

onde A e B são os coeficientes a serem determinados. Assim:

$$\frac{d}{dt}\left[A\cos(2\pi 60t) + B\sin(2\pi 60t)\right] + 1000\left[A\cos(2\pi 60t) + B\sin(2\pi 60t)\right] = 20000\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 30^\circ)$$

$$-2\pi 60A\sin(2\pi 60t) + 2\pi 60B\cos(2\pi 60t) + 1000A\cos(2\pi 60t) + 1000B\sin(2\pi 60t) = 20000\sqrt{2}\left[\cos(2\pi 60t)\cos(30^\circ) - \sin(2\pi 60t)\sin(30^\circ)\right]$$

Igualando os termos que multiplicam $\cos(2\pi 60t)$ em uma equação e os que multiplicam $\sin(2\pi 60t)$ em outra, tem-se:

$$\begin{aligned} -120\pi A + 1000B &= -\sin(30^\circ)\, 20000\sqrt{2} \\ 120\pi B + 1000A &= \cos(30^\circ)\, 20000\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tem-se assim um sistema de equações lineares, cuja solução é:

$$\begin{aligned} A &= 26,11485378182902 \\ B &= -4,297067688863071 \end{aligned}$$

Ou seja, a solução de 13 é:

$$i(t) = I_0 \exp(-1000t) + 26,11 \cos(2\pi 60t) - 4,297 \sin(2\pi 60t)\, A$$

O termo cossenoidal e o termo senoidal podem ser agrupados, valendo-se de algumas relações trigonométricas.

$$i(t) = I_0 \exp(-1000t) + 26,47 \cos(2\pi 60t + 9,34°)\, A$$

A constante I_0 deve ser ajustada levando-se em conta o valor da corrente inicial no indutor, que neste caso é $i_0 = 0$. Assim, para $t = 0$, tem-se:

$$i(0) = I_0 + 26,47 \cos(9,34°) = 0$$

Logo, $I_0 = -26,11A$. Finalmente, a solução 13, levando-se em conta a corrente inicial no indutor, é dada por:

$$i(t) = -26,11 \exp(-1000t) + 26,47 \cos(2\pi 60t + 9,34°)\, A \tag{14}$$

A figura 16 ilustra o gráfico da função 14, indicando claramente cada uma das suas duas parcelas.

O termo $-26,11 \exp(-1000t)$ de 14 é uma exponencial decrescente, cujo valor tende para zero, de modo que para um valor de t muito maior que a constante de tempo do circuito $\frac{L}{R} = 1ms$ (ou seja, após o *transitório*), somente o termo cossenoidal estará presente:

$$i(t) = 26,47 \cos(2\pi 60t + 9,34°)\, A, \text{ para t} >> \frac{L}{R} = 1ms \tag{15}$$

Assim, ao se conectar a um indutor em série com um resistor uma fonte de tensão cossenoidal de $100V_{ef}$ ($100\sqrt{2}V$ de pico), após um período transtório de duração da ordem de $\frac{L}{R} = 1ms$, estabelece-se uma corrente nos dois elementos igual a $18,71A_{ef}$ ($26,47A$ de pico). A corrente está **atrasada** de $20,66°$ em relação à tensão, assim como ilustrado na figura 17.

2.5 Regime transitório e regime permanente senoidal (RPS)

A solução 14 nos mostra que a corrente num circuito RL série é composta por duas parcelas: uma transitória que decai segundo a constante de tempo do circuito $\frac{L}{R}$ e uma *permanente*, que é uma função cossenoidal de mesma freqüência que a fonte de tensão.

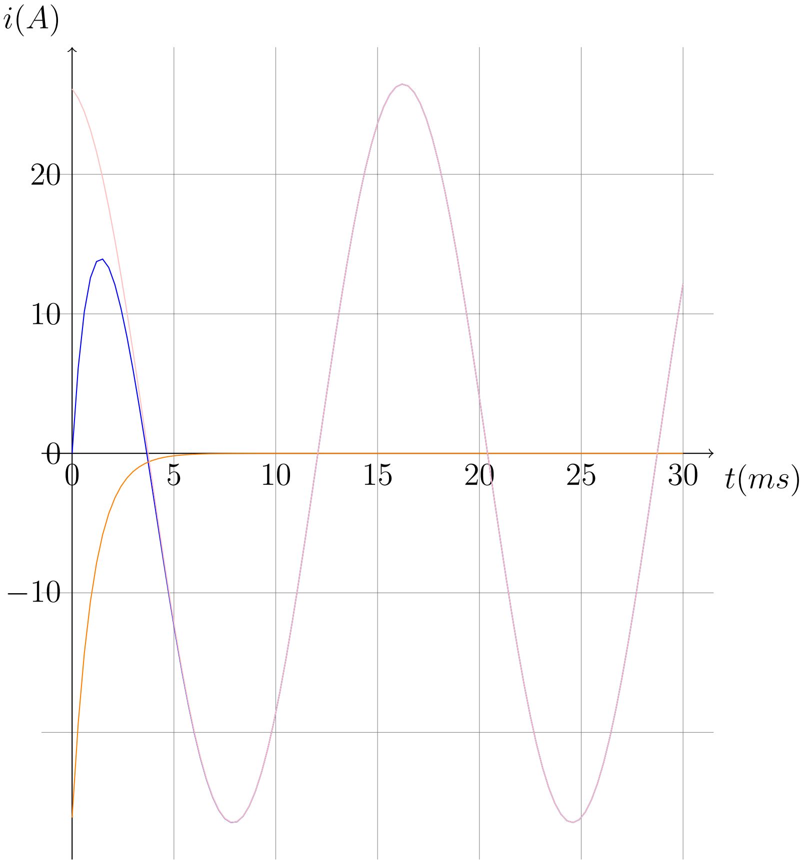

Figura 16: Gráfico da corrente no circuito RL (azul), composto da soma da componente temporária (laranja) e da componente permanente (rosa).

Muitas vezes, se está interessado unicamente na operação do circuito no **regime permanente senoidal** (RPS) que se estabelece após o transitório. É justamente para se obter esse regime de operação que os fasores ajudam na resolução do problema, evitando-se assim de se fazer todas as operações feitas na seção 2.4.4.

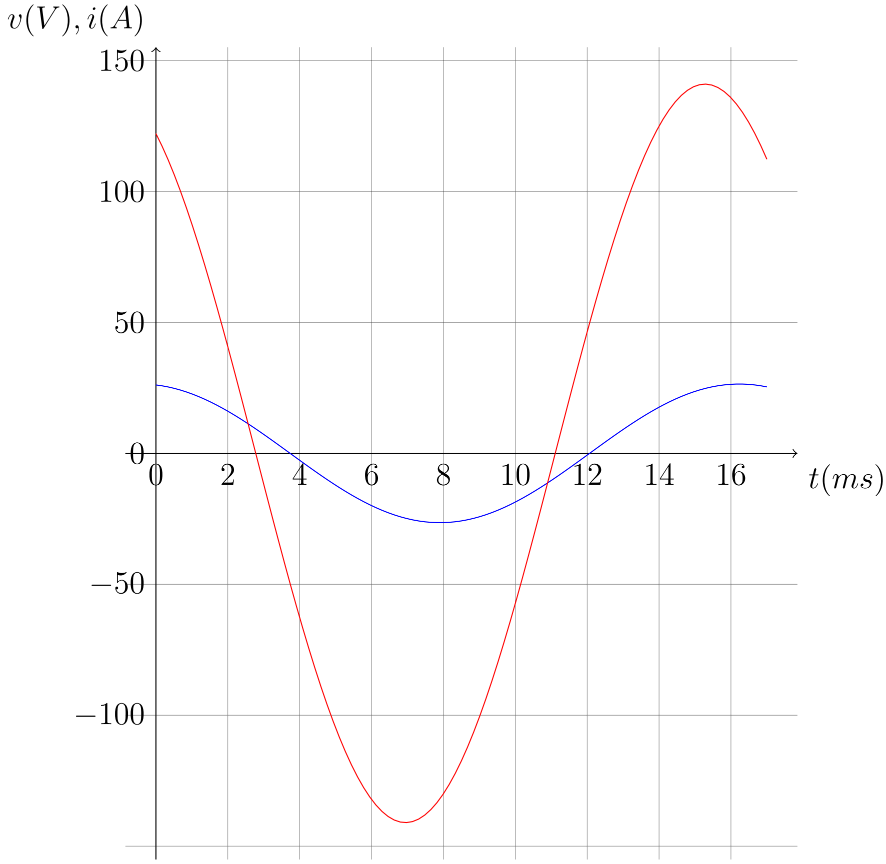

Figura 17: Corrente (azul) e tensão (vermelho) nos terminais do circuito RL série.

3 Uso de grandezas fasoriais

Nesta seção será apresentado o conceito de fasor e seu uso para a resolução de circuito elétricos em RPS.

3.1 Origem

Os fasores foram introduzidos na resolução de circuitos elétricos por Charles Proteus Steinmetz quando este trabalhava na General Electric no final do século XIX.

3.2 Definição

Fasor é um número complexo que representa uma função cossenoidal. O módulo do número complexo é a amplitude da função e o argumento é a fase da função.

Por exemplo, seja circuito linear excitado por uma fonte de tensão que gera em seus terminais uma onda de tensão que pode ser descrita pela fórmula:

$$v(t) = 100\sqrt{2}\cos\left(2\pi 60t + 30°\right) V \tag{16}$$

A fórmula de Euler é dada por:

$$\exp\left(ja\right) = \cos\left(a\right) + j\sin\left(a\right) \tag{17}$$

Onde $j^2 = -1$. Logo:

$$\cos\left(a\right) = \mathrm{Re}\left[\exp\left(ja\right)\right] \tag{18}$$

Logo, a função cossenoidal pode ser reescrita como:

$$v(t) = \mathrm{Re}\left[100\sqrt{2}\exp\left(j\left(2\pi 60t + 30°\right)\right)\right] V = \mathrm{Re}\left[\underbrace{100\sqrt{2}\exp\left(j30°\right)}_{\widehat{V}}\exp\left(j\left(2\pi 60t\right)\right)\right] V \tag{19}$$

Assim, o fasor correspondente à função é dado por:

$$\widehat{V} = 100\sqrt{2}\exp\left(j30°\right) V = 100\sqrt{2}\angle 30° V = \left(50\sqrt{6} + j50\sqrt{2}\right) V \tag{20}$$

Observa-se que o fasor não traz consigo a informação da freqüência $\omega = 2\pi 60 rad/s$ da função; isso acontece pois a freqüência de análise fica subentendida: todas as tensões e correntes do circuito tem a mesma freqüência (pelo fato de o circuito ser linear, excitações cossenoidais produzirão efeitos também cossenoidais de mesma freqüência).

3.3 Relações de tensão e corrente nos elementos de circuito

Assim como será visto nessa seção, ao se trabalhar com fasores as relações entre a tensão e corrente nos elementos de circuito podem ser obtidas de forma muito mais simples.

3.3.1 Resistor

A relação entre a tensão e a corrente nos terminais de um resistor é dada pela lei de Ohm:

$$i = \frac{v}{R}$$

Seja $v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$. Tem-se que a corrente será dada por:

$$i(t) = \frac{V_M}{R} \cos(\omega t + \phi)$$

O fasor associado à tensão $v(t)$ é o número complexo $\widehat{V} = V_M \angle \phi$. Já o fasor de corrente é $\widehat{I} = \frac{V_M}{R} \angle \phi$. Ou seja, a lei de Ohm, expressa em grandezas fasoriais, é dada por:

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{V}}{R} \tag{21}$$

Introduzindo o conceito de condutância G como sendo o inverso da resistência.

$$G = \frac{1}{R} \tag{22}$$

Tem-se:

$$\widehat{I} = G\widehat{V} \tag{23}$$

O gráfico da tensão e da corrente num resistor está ilustrado na figura 18 e o diagrama fasorial está ilustrado na figura 19.

3.3.2 Capacitor

A relação entre a tensão e a corrente nos terminais de um capacitor é dada por 10:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}(t)$$

Seja $v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$. Tem-se que a corrente será dada por:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{d}{dt} V_M \cos(\omega t + \phi) \\ &= V_M C(-\omega) \sin(\omega t + \phi) \\ &= \omega C V_M \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \end{aligned}$$

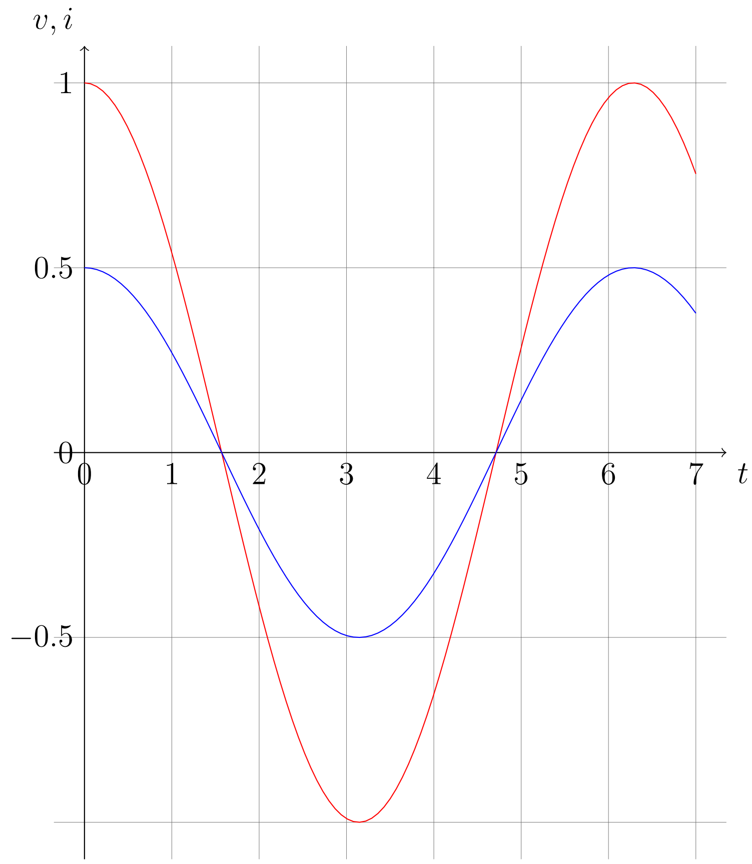

Figura 18: Corrente (azul) e tensão (vermelho) nos terminais do resistor.

O fasor associado à tensão $v(t)$ é o número complexo $\widehat{V} = V_M\angle\phi$. Já o fasor de corrente é $\widehat{I} = \omega C V_M\angle(\phi + 90°)$. Sendo $j = 1\angle 90°$, tem-se $\widehat{I} = j\omega C V_M\angle\phi$. Ou seja, a corrente no capacitor, expressa em grandezas fasoriais, é dada por:

$$\widehat{I} = j\omega C\widehat{V} \tag{24}$$

O gráfico da tensão e da corrente num capacitor está ilustrado na figura 20 e o diagrama fasorial está ilustrado na figura 21.

3.3.3 Indutor

A relação entre a tensão e a corrente nos terminais de um indutor é dada por 7:

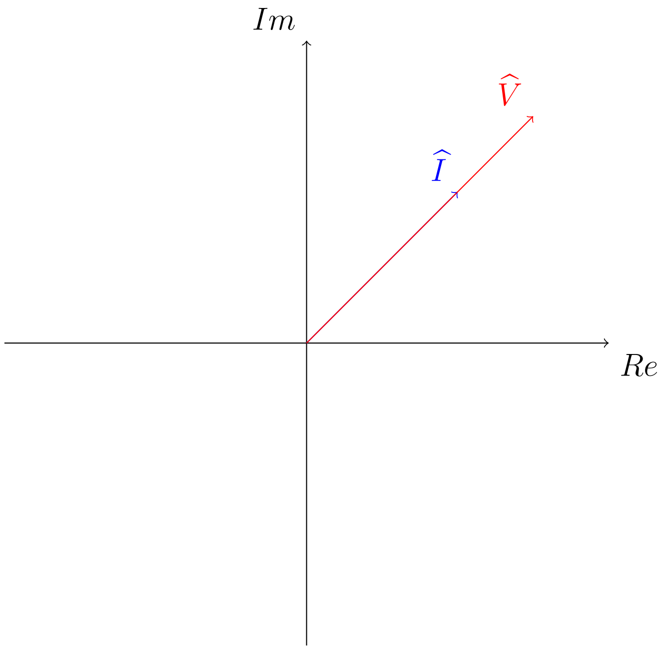

Figura 19: Fasores de corrente (azul) e tensão (vermelho) no resistor, representados no plano complexo.

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt$$

Seja $v(t) = V_M \cos{(\omega t + \phi)}$. Tem-se que a corrente será dada por:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V_M \cos{(\omega t + \phi)}\, dt \\ &= \frac{V_M}{L}\frac{1}{\omega}\sin{(\omega t + \phi)} \\ &= \frac{V_M}{\omega L}\cos{(\omega t + \phi - 90^\circ)} \end{aligned}$$

O fasor associado à tensão $v(t)$ é o número complexo $\widehat{V} = V_M \angle \phi$. Já o fasor de corrente é $\widehat{I} = \frac{V_M}{\omega L} \angle\, (\phi - 90^\circ)$. Sendo $\frac{1}{j} = -j = 1\angle - 90^\circ$, tem-se $\widehat{I} = \frac{V_M \angle \phi}{j\omega L}$. Ou seja, a corrente no indutor, expressa em grandezas fasoriais, é dada por:

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{V}}{j\omega L} = -\frac{j\widehat{V}}{\omega L} \tag{25}$$

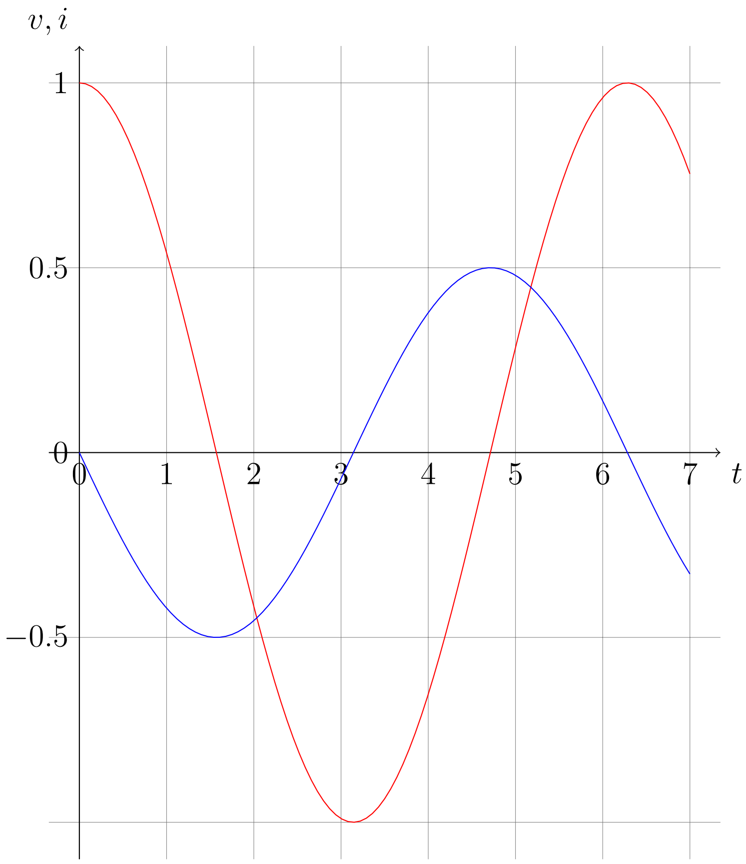

Figura 20: Corrente (azul) e tensão (vermelho) nos terminais do capacitor.

O gráfico da tensão e da corrente num indutor está ilustrado na figura 22 e o diagrama fasorial está ilustrado na figura 23.

As relações fasoriais obtidas para o resistor, o capacitor e o indutor são resumidas na tabela 1.

3.3.4 Obtenção da resposta em RPS utilizando fasores

Será refeito a seguir o exemplo da seção 13, mas desta vez usando-se fasores:

Seja o circuito da figura 15, onde uma fonte de corrente cossenoidal de $i(t) = 20\sqrt{2}\cos\left(2\pi 60t + 30°\right) V$ está conectada a um indutor, cuja indutância é de $5mH$. Ignorando-se o regime transitório, pede-se a tensão nos terminais do indutor em regime permanente senoidal.

O fasor de corrente é $\widehat{I} = 20\sqrt{2}\angle 30°$. O fasor de tensão é dado por:

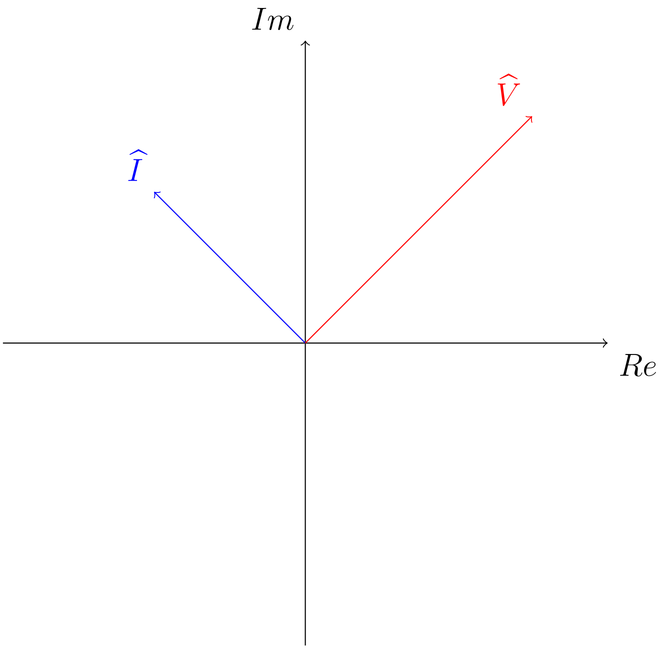

Figura 21: Fasores de corrente (azul) e tensão (vermelho) no capacitor, representados no plano complexo.

Tabela 1: Relações fasoriais para bipolos lineares.

Bipolo	Relações fasoriais	
Resistor	$\widehat{V} = R\widehat{I}$	$\widehat{I} = G\widehat{V}$
Capacitor	$\widehat{V} = \frac{1}{j\omega C}\widehat{I}$	$\widehat{I} = j\omega C\widehat{V}$
Indutor	$\widehat{V} = j\omega L\widehat{I}$	$\widehat{I} = \frac{1}{j\omega L}\widehat{V}$

$$
\begin{aligned}
\widehat{V} &= j\omega L\widehat{I} \\
&= j2\pi 60.5.10^{-3}20\sqrt{2}\angle 30^\circ \\
&= 12\pi\sqrt{2}\angle 120^\circ
\end{aligned}
$$

Ou seja, a tensão é expressa pelo fasor $\widehat{V} = 12\pi\sqrt{2}\angle 120^\circ$, que é associado à função $v(t) = 12\pi\sqrt{2}\cos(2\pi 60t + 120^\circ)$.

Vê-se assim que o uso de fasores, que traz consigo todas as propriedades dos números complexos, facilita a aplicação das relações trigonométricas, de modo que no final o cálculo é simplificado.

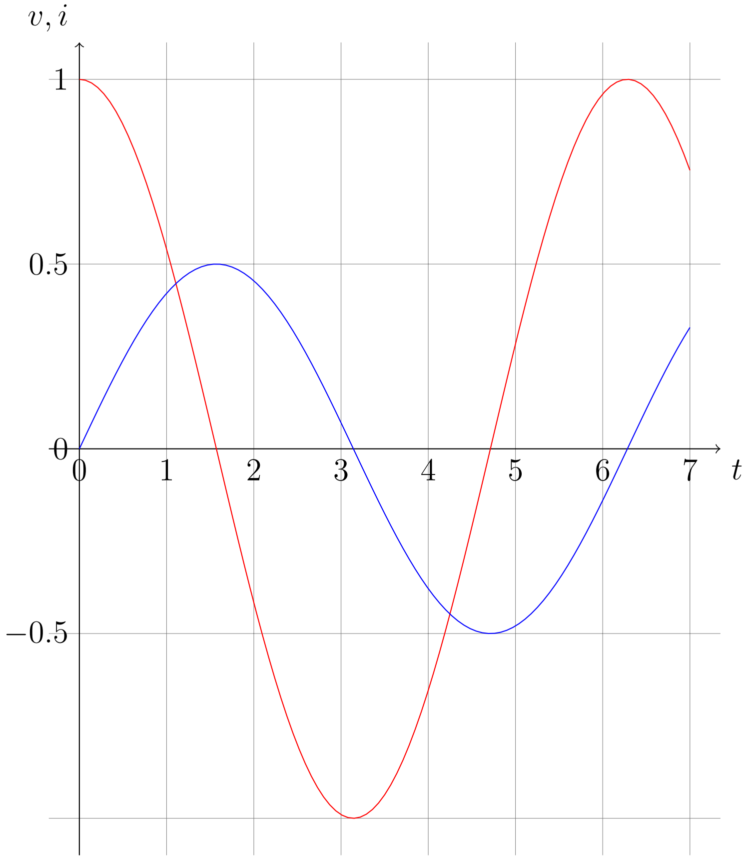

Figura 22: Corrente (azul) e tensão (vermelho) nos terminais do indutor.

3.4 Conceito de indutância e admitância complexas

Suponha agora que se tenha uma fonte de tensão cossenoidal alimentando um circuito RL série, assim como na seção 2.4.4.

Não serão demonstrados aqui os detalhes, mas a relação que há entre o fasor de corrente nos elementos e a tensão aplicada nos terminais é dada por:

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{V}}{R + j\omega L} \tag{26}$$

Ou seja, o fasor de corrente é igual ao fasor de tensão dividido pela **associação série** da resistência R com $j\omega L$. Fazendo-se a análise dimensional de ωL, vê-se que essa grandeza tem dimensão de resistência (ou seja, $[\omega L] = \Omega$).

Introduz-se, assim, o conceito de **impedância complexa, que é a generalização do conceito de resistência quando se trabalha com circuitos elétricos em corrente alternada senoidal**.

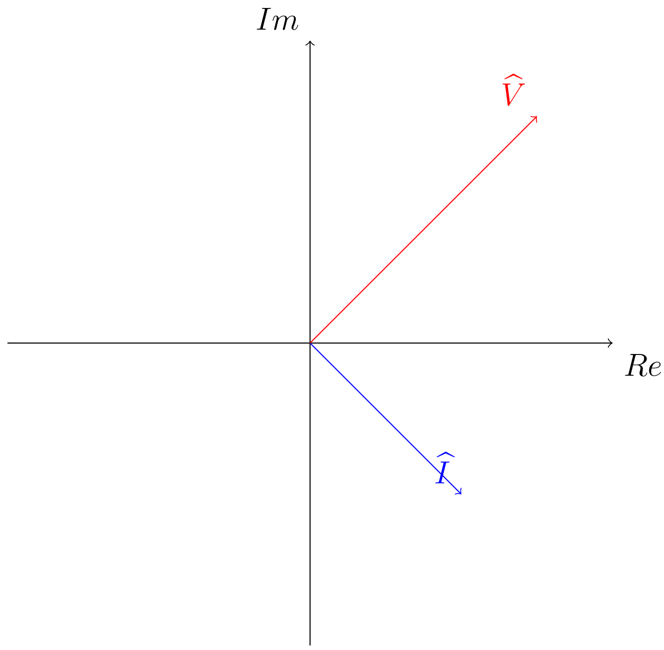

Figura 23: Fasores de corrente (azul) e tensão (vermelho) no indutor, representados no plano complexo.

Define-se a impedância complexa $\dot{Z}$ como sendo um número complexo que relaciona o fasor de tensão com o fasor de corrente entre dois terminais quaisquer do circuito:

$$\dot{Z} = \frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} \tag{27}$$

Ou seja:

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{V}}{\dot{Z}} \tag{28}$$

Voltando para o caso da associação série RL, tem-se que a impedância do circuito em série é dada por:

$$\dot{Z} = R + j\omega L \tag{29}$$

Onde $j\omega L$ é a impedância complexa do indutor.

Refazendo-se, assim, o exemplo da seção 2.4.4, mas desta vez usando-se fasores, tem-se:

O fasor de tensão é $\widehat{V} = 100\sqrt{2}\angle 30°$. O fasor de corrente é dado por:

$$
\begin{aligned}
\widehat{I} &= \frac{\widehat{V}}{\dot{Z}} \\
&= \frac{100\sqrt{2}\angle 30^{\circ}}{R + j\omega L} \\
&= \frac{100\sqrt{2}\angle 30^{\circ}}{5 + j2\pi 60.5.10^{-3}} \\
&= \frac{100\sqrt{2}\angle 30^{\circ}}{5 + j1,885} \\
&= \frac{100\sqrt{2}\angle 30^{\circ}}{5,3435\angle 20,66^{\circ}} \\
&= \frac{100\sqrt{2}}{5,3435}\angle\left(30^{\circ} - 20,66^{\circ}\right) \\
&= 26,47\angle 9,34^{\circ}
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$
i(t) = 26,47\cos\left(2\pi 60t + 9,34^{\circ}\right) A \tag{30}
$$

Chegando-se à mesma expressão 15, mas de maneira mais simples.

Assim como se definiu em 22 a expressão da condutância como sendo o inverso da resistência, defini-se a **admitância complexa** como sendo o inverso da impedância.

$$
\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} \tag{31}
$$

Assim, a tabela 1 pode ser reescrita como sendo os valores da impedâncias e admitâncias complexas dos bipolos lineares, assim como indicado na tabela 2.

Tabela 2: Impedâncias e admitâncias complexas dos bipolos lineares.

Bipolo	Impedância complexa ($\dot{Z}$)	Admitância complexa ($\dot{Y}$)
Resistor	R	$G = \frac{1}{R}$
Capacitor	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$	$j\omega C$
Indutor	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$

De maneira análoga ao que acontece com circuitos elétricos operando em corrente contínua, em que a resistência equivalente de elementos em paralelo é obtida pelo inverso da soma dos inversos das resistências individuais, para circuitos em corrente alternada a impedância complexa equivalente de uma associação em paralelo é igual ao inverso da soma dos inversos da impedância individuais. A tabela 3 indica como são feitas as associações entre elementos em série e paralelo.

Tabela 3: Impedâncias e admitâncias complexas dos bipolos lineares.

Associação	Impedância complexa ($\dot{Z}_{eq}$)	Admitância complexa ($\dot{Y}_{eq}$)
Série	$\sum \dot{Z}$	$\frac{1}{\sum \frac{1}{\dot{Y}}}$
Paralelo	$\frac{1}{\sum \frac{1}{\dot{Z}}}$	$\sum \dot{Y}$