Centro Universitário de Belo Horizonte - UniBH
Graduação em Engenharia Elétrica

Potência e energia em circuitos elétricos em regime permanente senoidal

Philipe Cesar Teixeira Pereira

Belo Horizonte, junho de 2020

Sumário

1 Introdução

Os sistemas elétricos de potência trabalham com tensões e correntes alternadas, o que significa que essas grandezas, ao serem medidas num dado ponto, variam senoidalmente no tempo numa dada frequência (que pode ser de $60Hz$ no Brasil e nos Estados Unidos ou $50Hz$ na Europa).

No texto sobre fasores [2] foi apresentado o uso de números complexos para a resolução de circuitos elétricos em regime permanente senoidal (RPS). O que será mostrado neste texto será o cálculo da potência consumida por um bipolo linear quando em seus terminais é aplicada uma tensão cossenoidal, o que engendra a circulação de uma corrente também cossenoidal (defasada ou não).

Nas próximas seções, serão apresentados as expressões para os cálculos da energia e da potência elétricas transferidas entre elementos lineares de circuitos elétricos. Num segundo momento, mostraremos como ficam tais expressões quando utiliza-se fasores para a representações das grandezas elétricas.

2 No domínio do tempo

Assim como foi feito no estudo de fasores, na primeira parte deste estudo serão mostrados os cálculos no *domínio do tempo* (i.e., as tensões e correntes serão dadas como funções onde o tempo é a variável, $v(t)$ e $i(t)$). Mais uma vez, será observado que tais cálculos serão mais difíceis do que aqueles feitos quando se utiliza fasores.

2.1 Potência em bipolos

Recapitulando conceitos básicos de circuitos elétricos, dado um bipolo qualquer, assim como ilustrado na figura 1, a expressão da potência transferida em seus terminais é dada por:

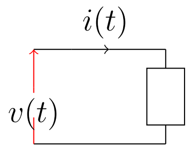

Figura 1: Bipolo em cujos terminais estabelece-se uma tensão $v(t)$ e circula-se uma corrente $i(t)$.

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{1}$$

A energia transferida num dado período de tempo (entre os instantes de tempo 0 e t) é dada por:

$$e(t) = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t v(t)i(t)dt \tag{2}$$

Há aqui, no entanto, uma dúvida: quando se afirma que a energia (ou potência) é transferida nos terminais do bipolo, é importante saber se ela está *partindo* do elemento (como ocorre, por exemplo, num gerador, tal como uma bateria) ou *entrando* nele (neste último caso, ela pode ser transformada em calor por efeito Joule ou então armazenada sob a forma de campos elétricos ou magnéticos). Assim, faz-se necessário introduzir a *convenção do receptor* e a *convenção do gerador* [1].

2.1.1 Convenção do receptor e convenção do gerador

Define-se que um bipolo está na *convenção do receptor* quando a corrente **entra** no terminal para o qual aponta a seta da tensão. Isso foi ilustrado na figura 1.

Do mesmo modo, define-se que um bipolo está na *convenção do gerador* quando a corrente **sai** do terminal para o qual aponta a seta da tensão. Isso está ilustrado na figura 2.

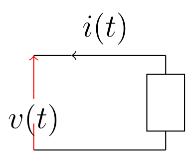

Figura 2: Convenção do gerador.

Quando bipolo está na *convenção do receptor* e aplicando a fórmula 1, o resultado dá positivo quando o bipolo consome potência e negativo quando fornece.

Do mesmo modo, quando bipolo está na *convenção do gerador* e aplicando a fórmula 1, o resultado dá positivo quando o bipolo fornece potência e negativo quando consome.

2.2 Corrente contínua

Para circuitos elétricos operando em corrente contínua, não há variação temporal nos valores das tensões e correntes ($v(t) = V$ e $i(t) = I$). Logo, a expressão 1 da potência $p(t)$ é uma constante P assumindo a forma:

$$P = VI \tag{3}$$

Sendo esta a expressão já conhecida da potência até então.

2.3 Corrente alternada e carga resistiva

Para circuitos elétricos operando em corrente alternada, não podemos utilizar a expressão 3, mas sim 1. Como um primeiro exemplo, considera-se o circuito da figura 3, onde um resistor é alimentado por um tensão $v(t)$ (a corrente e a tensão estão indicadas na convenção do receptor).

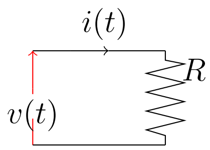

Figura 3: Carga resistiva (convenção do receptor) sendo alimentada por uma tensão $v(t)$ cossenoidal.

A tensão $v(t)$, por ser cossenoidal, pode ser escrita na forma:

$$v(t) = V_{max} \cos(\omega t + \phi) \tag{4}$$

Pela lei de Ohm, a corrente $i(t)$ é:

$$i(t) = \frac{V_{max}}{R} \cos(\omega t + \phi) \tag{5}$$

Logo, a potência $p(t)$ será:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_{max}^2}{R} \cos^2(\omega t + \phi) \tag{6}$$

Ora, o quadrado do cosseno de um ângulo pode ser calculado como:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \tag{7}$$

Aplicando 7 em 6, tem-se:

$$p(t) = \frac{V_{max}^2}{2R} \left[1 + \cos 2(\omega t + \phi)\right] \tag{8}$$

A expressão 8 é composta de duas parcelas:

- Uma parcela constante, $\frac{V_{max}^2}{2R}$, que é o valor médio transferido de potência;

- Uma parcela pulsante, $\frac{V_{max}^2}{2R}\cos 2\left(\omega t+\phi\right)$, que ora é fornecida ao resistor, ora é emitida por ele, num ciclo que tem o dobro da frequência das ondas de tensão e de corrente.

A função $1+\cos 2\left(\omega t+\phi\right)$ varia entre 0 e 2, o que indica que, ao se somar as duas parcelas da potência, num dado instante t' não há transferência de potência ($p(t')=0$), enquanto que em outro t'' transfere-se o máximo ($p(t'')=\frac{V_{max}^2}{R}$). Em média, transfere-se $\frac{V_{max}^2}{2R}$. Um gráfico da expressão 8 é indicado na figura 4.

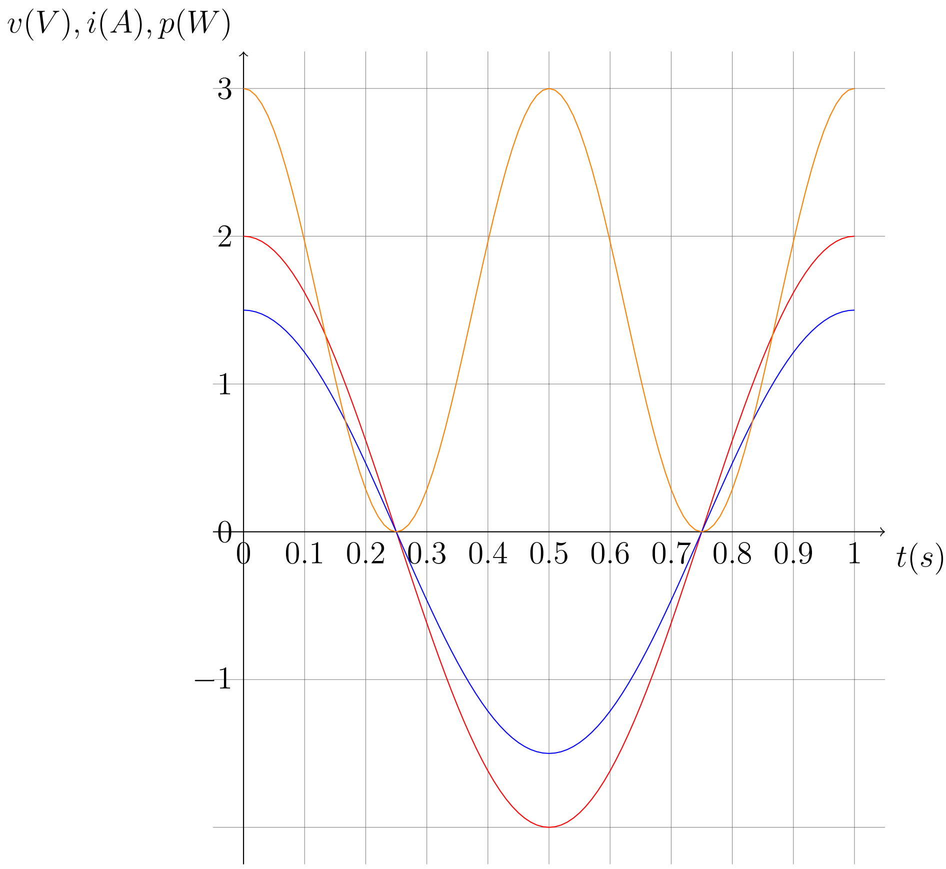

Figura 4: Gráfico da tensão (vermelho), da corrente (azul) e da potência (laranja) em função do tempo para uma carga resistiva (convenção do receptor: potência positiva é consumida pelo resistor). Dados: $f=1Hz$, $V_{max}=2V$, $R=\frac{4}{3}\Omega$.

2.4 Corrente alternada e carga indutiva

Considera-se, agora, o circuito da figura 5, onde um indutor é alimentado por um tensão $v(t)$ (a corrente e a tensão estão indicadas na convenção do receptor).

A tensão $v(t)$ é a mesma dada na expressão 4. Já a corrente $i(t)$ é dada por [2]:

$$i(t)=\frac{V_{max}}{\omega L}\cos\left(\omega t+\phi-90^\circ\right)=\frac{V_{max}}{\omega L}\sin\left(\omega t+\phi\right) \tag{9}$$

Logo, a potência $p(t)$ será:

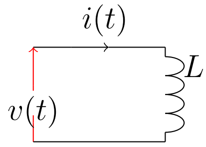

Figura 5: Carga indutiva (convenção do receptor) sendo alimentada por uma tensão $v(t)$ cossenoidal.

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_{max}^2}{\omega L} \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \tag{10}$$

Ora, o produto de um cosseno por um seno pode ser calculado como:

$$\cos a \sin a = \frac{1}{2} \sin 2a \tag{11}$$

Aplicando 11 em 10, tem-se:

$$p(t) = \frac{V_{max}^2}{2\omega L} \sin 2(\omega t + \phi) \tag{12}$$

Observa-se que:

- ao contrário do que foi observado em 8, o valor médio é nulo;
- a potência é pulsante, ora sendo fornecida ao indutor, ora sendo emitida por ele, num ciclo que, assim como no caso do resistor, tem o dobro da frequência das ondas de tensão e de corrente.

A função $\sin 2(\omega t + \phi)$ varia entre -1 e 1, o que indica que num dado instante t' ocorre a transferência de máxima de potência para o indutor ($p(t') = \frac{V_{max}^2}{2\omega L}$), enquanto que em outro t'' transfere-se o máximo dele ($p(t'') = -\frac{V_{max}^2}{2\omega L}$). Em média, não há potência transferida: tudo que é fornecido num ciclo é devolvido no ciclo seguinte. Um gráfico da expressão 12 é indicado na figura 6.

2.5 Corrente alternada e carga capacitiva

Considera-se, agora, o circuito da figura 7, onde um indutor é alimentado por um tensão $v(t)$ (a corrente e a tensão estão indicadas na convenção do receptor).

A tensão $v(t)$ é a mesma dada na expressão 4. Já a corrente $i(t)$ é dada por [2]:

$$i(t) = \omega C V_{max} \cos(\omega t + \phi + 90°) = -\omega C V_{max} \sin(\omega t + \phi) \tag{13}$$

Logo, a potência $p(t)$ será:

$$p(t) = v(t)i(t) = -\omega C V_{max}^2 \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \tag{14}$$

Aplicando 11 em 14, tem-se:

$$p(t) = -\frac{\omega C V_{max}^2}{2} \sin 2(\omega t + \phi) \tag{15}$$

Observa-se que:

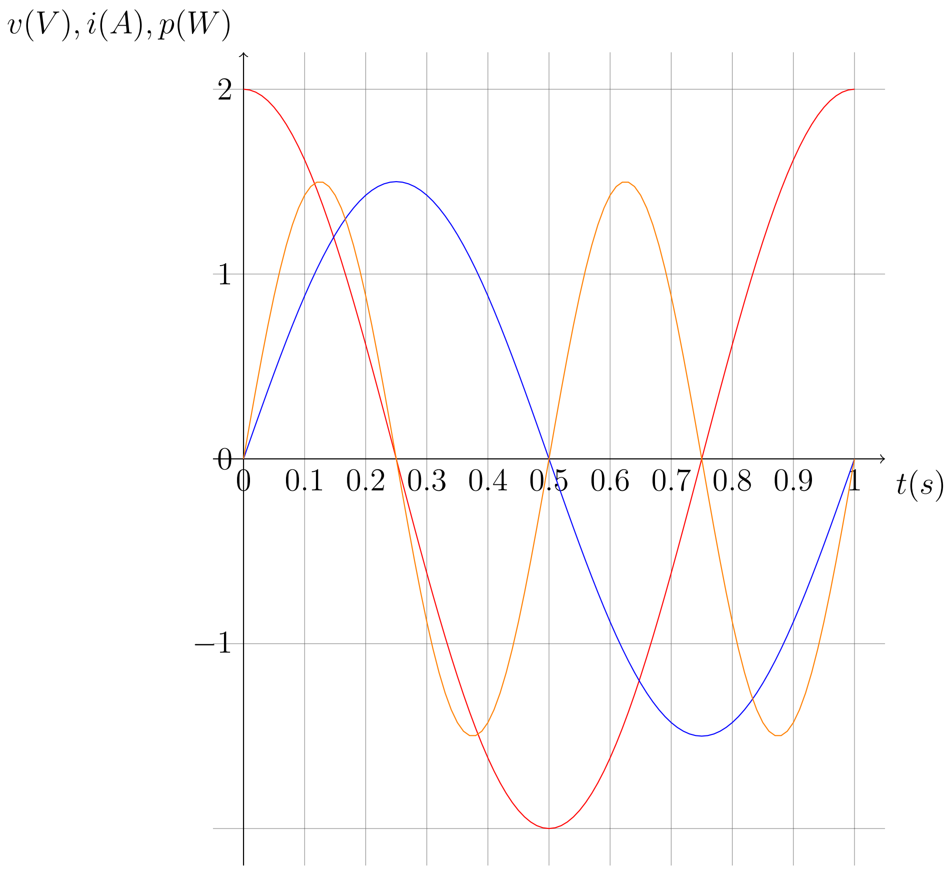

Figura 6: Gráfico da tensão (vermelho), da corrente (azul) e da potência (laranja) em função do tempo para uma carga indutiva (convenção do receptor: potência positiva é consumida pelo indutor, negativa é devolvida). Dados: $f = 1Hz$, $V_{max} = 2V$, $L = \frac{2}{3\pi}H$.

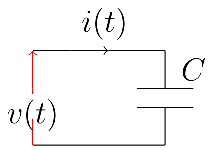

Figura 7: Carga capacitiva (convenção do receptor) sendo alimentada por uma tensão $v(t)$ cossenoidal.

- ao contrário do que foi observado em 8 e da mesma maneira que em 12, o valor médio é nulo;
- a potência é pulsante, ora sendo fornecida ao capacitor, ora sendo emitida por ele, num ciclo que, assim como no caso do resistor e do indutor, tem o dobro da frequência das ondas de tensão e de corrente.

A função $\sin 2(\omega t + \phi)$ varia entre -1 e 1, o que indica que num dado instante t' ocorre a transferência de máxima de potência para o capacitor ($p(t') = \frac{\omega C V_{max}^2}{2}$), enquanto que em outro t'' transfere-se o máximo dele ($p(t'') = -\frac{\omega C V_{max}^2}{2}$). Em média, não há potência transferida: tudo que é fornecido num ciclo é devolvido no ciclo seguinte. Um gráfico da expressão 15 é indicado na figura 8.

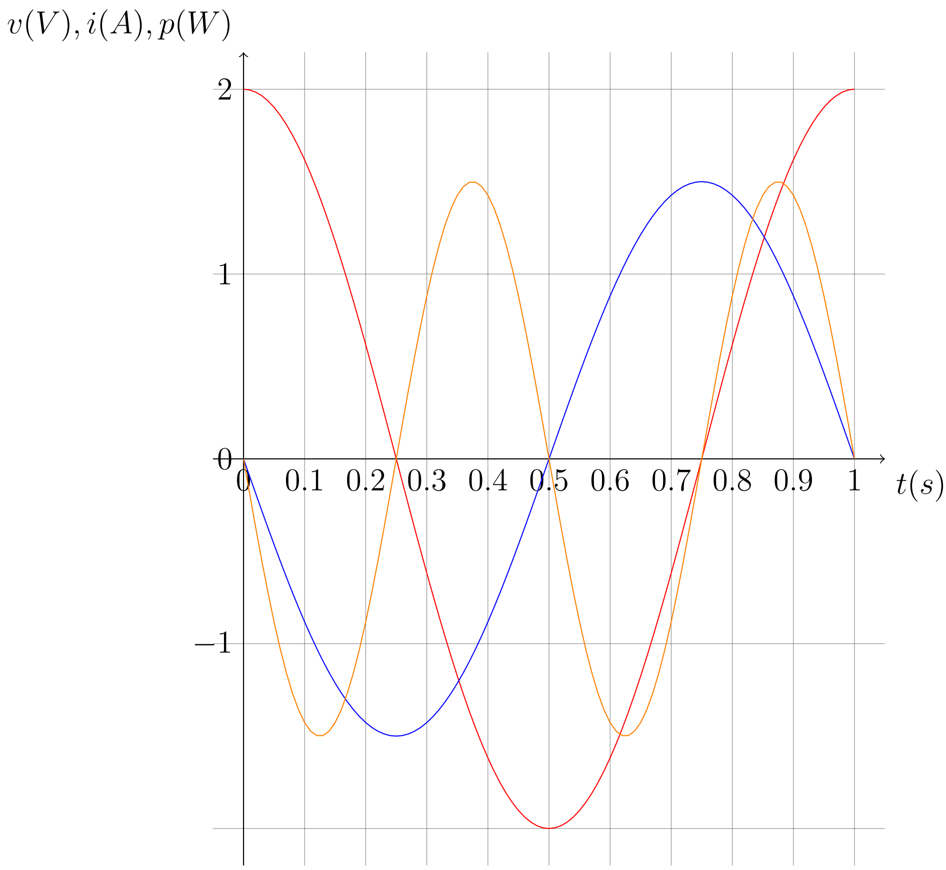

Figura 8: Gráfico da tensão (vermelho), da corrente (azul) e da potência (laranja) em função do tempo para uma carga capacitiva (convenção do receptor: potência positiva é consumida pelo capacitor, negativa é devolvida). Dados: $f = 1Hz$, $V_{max} = 2V$, $C = \frac{3}{8\pi}F$.

2.6 Corrente alternada e carga com uma impedância dada

Considera-se, agora, o circuito da figura 1, onde uma impedância é alimentada por uma tensão $v(t)$, sendo esta dada pela mesma expressão 4. Se a impedância complexa da carga para uma dada frequência ω for $\dot{Z} = |Z| \angle \phi_Z$, a corrente $i(t)$ será dada por [2]:

$$i(t) = \frac{V_{max}}{|Z|} \cos\left(\omega t + \phi - \phi_Z\right) \tag{16}$$

Logo, a potência $p(t)$ será:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_{max}^2}{|Z|} \cos\left(\omega t + \phi\right) \cos\left(\omega t + \phi - \phi_Z\right) \tag{17}$$

Sabendo-se que:

$$\begin{aligned} \cos a \cos\left(a + b\right) &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2a + b\right) + \cos b\right] && (18) \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2a\right)\cos b - \sin\left(2a\right)\sin b + \cos b\right] && (19) \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos b\left(1 + \cos\left(2a\right)\right) - \sin b \sin\left(2a\right)\right] && (20) \end{aligned}$$

Aplicando 20 em 17, tem-se:

$$p(t) = \frac{V_{max}^2}{2|Z|}\left[\cos\phi_Z\left(1+\cos 2\left(\omega t+\phi\right)\right)+\sin\phi_Z \sin 2\left(\omega t+\phi\right)\right] \quad (21)$$

$$= \frac{V_{max}^2}{2|Z|}\left[\cos\phi_Z\left(1+\cos 2\left(\omega t+\phi\right)\right)\right]+\frac{V_{max}^2}{2|Z|}\left[\sin\phi_Z \sin 2\left(\omega t+\phi\right)\right] \quad (22)$$

Observa-se que:

- assim como foi observado em 8, o valor médio é não nulo, mas seu valor é dado por $\frac{V_{max}^2}{2|Z|}\cos\phi_Z$;
- a expressão da potência pode ser dividida em duas parcelas:
  - A parcela $\frac{V_{max}^2}{2|Z|}\cos\phi_Z\left[1+\cos 2\left(\omega t+\phi\right)\right]$, de valor médio não nulo e igual ao valor médio total $\frac{V_{max}^2}{2|Z|}\cos\phi_Z$, que corresponde à mesma potência que seria transferida a um resistor de valor $\frac{|Z|}{\cos\phi_Z}$;
  - E a parcela $\frac{V_{max}^2}{2|Z|}\sin\phi_Z \sin 2\left(\omega t+\phi\right)$, de valor médio nulo, que corresponde à mesma potência que seria transferida a um indutor de valor $\frac{|Z|}{\omega\sin\phi_Z}$;
- a potência, mais uma vez, é pulsante, ora sendo fornecida à impedância, ora sendo emitida por ela, num ciclo que, assim como nos casos anteriores, tem o dobro da frequência das ondas de tensão e de corrente.

3 Conceito de potência ativa, reativa e aparente

Todas as relações até aqui obtidas levaram-se em conta as expressões de tensão v e corrente i dadas em função do tempo.

Nesta seção, serão introduzidos alguns conceitos que nos permitirão obter as expressões das potências tão somente a partir das amplitudes e das fases das ondas de tensão e corrente.

3.1 Conceito de tensão e corrente eficazes

Antes de mais nada, é importante definir o conceito de *valor eficaz*.

Seja $a(t)$ uma grandeza periódica qualquer, de período $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$. Seu valor eficaz é igual a:

$$A_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t)dt} \tag{23}$$

Para $t_0 \geq 0$. Seja $b(t)$ uma outra grandeza que, desta vez, varie cossenoidalmente no tempo.

$$b(t) = B_{max}\cos(\omega t + \phi) \tag{24}$$

Ao se aplicar a definição 23, tem-se que seu valor eficaz é dado por:

$$B_{ef} = \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} \tag{25}$$

3.2 Potência ativa e reativa

Define-se a *potência ativa* gerada e/ou dissipada em um elemento de circuito operando em RPS como sendo o valor médio da potência transferida.

Seja $v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2}V_{ef}\cos(\omega t + \phi)$ e $i(t) = I_{max}\cos(\omega t + \phi - \varphi) = \sqrt{2}I_{ef}\cos(\omega t + \phi - \varphi)$ a tensão e a corrente nos terminais de um bipolo qualquer, respectivamente. A potência transferida será dada por:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{2}V_{ef}\cos(\omega t + \phi)\sqrt{2}I_{ef}\cos(\omega t + \phi - \varphi) && (26)\\ &= 2V_{ef}I_{ef}\frac{1}{2}\left[\cos\varphi\left(1 + \cos 2(\omega t + \phi)\right) + \sin\varphi \sin 2(\omega t + \phi)\right] && (27)\\ &= V_{ef}I_{ef}\cos\varphi\left[1 + \cos 2(\omega t + \phi)\right] + V_{ef}I_{ef}\sin\varphi\sin 2(\omega t + \phi) && (28) \end{aligned}$$

Assim como foi mencionado na seção 2.6, o valor médio de 28 é dado por:

$$P = V_{ef}I_{ef}\cos\varphi \tag{29}$$

Sendo portanto a potência ativa consumida/gerada pelo bipolo.

Define-se *potência reativa* gerada e/ou consumida em um elemento de circuito operando em RPS como sendo a amplitude da potência pulsante de valor médio nulo, ou seja:

$$Q = V_{ef}I_{ef}\sin\varphi \tag{30}$$

3.3 Potência aparente complexa

Define-se a potência aparente complexa $\dot{S}$ como sendo:

$$\dot{S} = P + jQ \tag{31}$$

Tem-se que:

$$\left|\dot{S}\right| = \sqrt{P^2 + Q^2} = |V_{ef}|\,|I_{ef}| \tag{32}$$

4 No domínio da frequência

Partindo dos fasores de tensão $\widehat{V}$ e $\widehat{I}$, tem-se que:

$$\dot{S} = \widehat{V}\widehat{I}^* \tag{33}$$

Assim, a potência ativa P será dada por:

$$P = \Re\left[\dot{S}\right] = \Re\left[\widehat{V}\widehat{I}^*\right] \tag{34}$$

e a potência reativa Q será dada por:

$$Q = \Im\left[\dot{S}\right] = \Im\left[\widehat{V}\widehat{I}^*\right] \tag{35}$$

Referências

[1] L. Q. Orsini e D. Consonni. “Curso de Circuitos Elétricos - Volume 1”. Em: Edgard Blucher, 2002. Cap. I - Conceitos básicos, pp. 1–40.

[2] P. C. T. Pereira. *Uso de fasores para resolução de circuitos elétricos*. 2020.