

Dinâmica de motores elétricos  
Análise da máquina de indução na geração de energia a  
partir das ondas do mar pelo sistema de coluna d'água  
oscilante

Philippe César Teixeira Pereira

10/07/2013

# Sumário

<b>1</b>	<b>Aspectos mecânicos</b>	<b>4</b>
1.1	Modelização das ondas do mar . . . . .	4
1.1.1	Teoria de onda de Airy . . . . .	4
1.1.2	Ondas progressivas periódicas . . . . .	6
1.1.3	Linearização . . . . .	8
1.1.4	Energia associada . . . . .	15
1.1.5	Limites dos resultados obtidos . . . . .	17
1.1.6	Ondas aleatórias e decomposição espectral . . . . .	18
1.2	Coluna d'água oscilante . . . . .	18
1.2.1	Diferentes técnicas de conversão da energia das ondas . . . . .	18
1.2.2	Princípios da coluna d'água oscilante . . . . .	20
1.3	Turbina <i>Wells</i> e grupo turbo-gerador . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Sistema elétrico</b>	<b>26</b>
2.1	Modelização da máquina de indução . . . . .	26
2.1.1	Generalidades . . . . .	26
2.1.2	Circuito magnético . . . . .	26
2.1.3	Circuito elétrico . . . . .	30
2.1.4	Torque eletromagnético . . . . .	31
2.1.5	Conservação da energia . . . . .	32
2.1.6	Circuito elétrico equivalente . . . . .	33
2.1.7	Operação em regime permanente . . . . .	35
2.1.8	Orientação de campo . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Condicionamento e controle</b>	<b>38</b>
3.0.9	Velocidade constante . . . . .	38
3.1	Sistema de geração com velocidade variável . . . . .	39
3.1.1	Velocidade variável com passos discretos . . . . .	39
3.1.2	Velocidade variável com passos contínuos - conversão eletrônica . . . . .	39
3.1.3	Conversor AC-DC-AC . . . . .	40
3.1.4	Análise desacoplada . . . . .	41
3.1.5	Controle do gerador de indução . . . . .	41
3.1.6	Controle do conversor conectado à rede . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Simulações</b>	<b>43</b>
4.1	Gerador de indução com rotor em gaiola diretamente conectado à rede . . . . .	43
4.2	Gerador de indução com rotor em gaiola conectado à rede através de um conversor AC/DC/AC . . . . .	44
4.2.1	Conversor do lado da rede . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>47</b>

# Introdução

Num mundo cada mais necessitado de fontes alternativas de energia, os mares continuam sendo um grande reservatório de energia cujo potencial ainda não foi explorado. Uma vez que eles cobrem  $3/4$  da superfície da Terra, uma grande parte da energia do Sol que chega em nosso planeta é absorvida por suas águas, cuja dinâmica influencia o clima de continentes inteiros e provoca deslocamentos de ar que, uma vez que não encontram obstáculos, produzem ventos que atingem velocidades muito maiores que aqueles produzidos em terra, perturbando a superfície da água e criando ondas que viajam por centenas de quilômetros até atingir o litoral.

Aproveitar esse imenso reservatório para produzir energia elétrica impõe certos desafios, sendo que o primeiro deles seria reconhecer os diversos fenômenos que ocorrem nesse ambiente e tentar imaginar formas de converter a energia a eles associada em eletricidade. Como exemplo desses fenômenos, podemos citar:

- As marés;
- As correntes marítimas;
- Os ventos oceânicos;
- As ondas.

As marés estão relacionadas com a variação periódica do nível dos oceanos devido a influência gravitacional do Sol e da Lua. Um exemplo de sistema capaz de converter a energia desse movimento em eletricidade é a usina maremotriz de La Rance, localizada na França e exibida na fotografia da figura 1(a). Devido à uma formação natural privilegiada, onde há um grande bacia conectada ao oceano Atlântico por um canal estreito, foi construída uma barragem ao longo desse canal onde foram instaladas 27 turbinas com capacidade de 240 MW: durante a maré alta, o nível do oceano se eleva e as águas tentam entrar na bacia, passando pelas turbinas e gerando eletricidade. Durante a maré baixa, o processo se inverte, havendo mais uma vez conversão da energia.

Devido às diferenças de temperatura e salinidade da água do mar, fluxos naturais se estabelecem entre diferentes regiões dos oceanos, produzindo correntes marítimas debaixo de sua superfície. Assim, pode-se produzir eletricidade através de turbinas submersas, de maneira análogo àquilo que é feito nas usinas eólicas, porém utilizando a água como fluido motor ao invés do ar, com a vantagem que esta é mil vezes mais densa, o que elevaria a energia associada à conversão. A instalação SeaGen (figura 1(b)), no estreito de Strangford, na Irlanda do Norte, contando com duas turbinas instaladas à aproximadamente 30 metros de profundidade, produz 1,2 MW de eletricidade segundo esse princípio.

Assim como mencionado, a elevada densidade da água em comparação com a do ar faz com que as correntes marítimas pareçam mais atraente para produção de eletricidade, porém a energia eólica oceânica tem suas vantagens: as turbinas não estariam submersas, o que diminuiria seu desgaste e facilitaria a manutenção, e a ausência de obstáculos faria com que os ventos atingissem velocidades muito mais elevadas em comparação com os ventos do continente.



(a) Usina maremotriz de La Rance



(b) Usina marítima SeaGen

Figura 1: Exemplos de sistema de conversão da energia dos mares

Parte da energia dos ventos é transferida para a superfície dos mares criando perturbações que viajam por longas distâncias. Essas ondas possuem a vantagem de eventualmente atingirem o litoral, trazendo consigo uma quantidade considerável de energia que pode ser convertida em eletricidade em terra firme. No que se segue, é nesse fenômeno em que concentraremos nossa análise.

## Descrição do texto

A primeira parte consistirá na modelização da parte mecânica do sistema. Faremos uma análise da dinâmica das ondas do mar, determinaremos expressões para o valor da potência associada ao seu movimento para em seguida apresentarmos um dos métodos que podem ser utilizados para extrair essa energia, conhecido como *coluna d'água oscilante*, com o qual obteremos um movimento de rotativo.

A segunda parte do trabalho consistirá no detalhamento do sistema que fará a conversão da energia mecânica em energia elétrica. Faremos uma pequena introdução aos princípios de funcionamento da máquina de indução operando como gerador e obteremos equações que descreveram sua dinâmica ao longo do tempo, analisando seu comportamento durante o processo de conversão eletromecânica.

A terceira parte do trabalho consistirá numa abordagem do condicionamento da energia produzida pelo gerador. Detalharemos métodos de controle que nos permitirão extrair potência do sistema da maneira mais eficiência possível e como se dará a injeção dessa potência no sistema elétrico.

Finalmente, encerraremos o trabalho com simulações que nos permitirão ter acesso a dados quantitativos da operação do sistema.

# Capítulo 1

## Aspectos mecânicos

[water waves] that are easily seen by everyone and which are usually used as an example of waves in elementary courses [...] are the worst possible example, because they are in no respect like sound and light; they have all the complications that waves can have.

---

Richard Feynman[1]

Nessa seção, faremos um estudo das ondas da mar e da energia mecânica a elas associada. Apresentaremos um modelo que descreve a dinâmica desse fenômeno e nos dá uma estimativa de sua potência. Em seguida, mostraremos as diferentes técnicas utilizadas para se converter a energia associada ao movimento oscilatório de um fluido em energia mecânica de uma peça sólida, dentre as quais destacaremos o sistema de coluna d'água oscilante. Ao final dessa seção, teremos uma expressão do torque e velocidade em função do tempo que serão aplicados no eixo de um gerador.

### 1.1 Modelização das ondas do mar

#### 1.1.1 Teoria de onda de Airy

No que se segue, apresentaremos a teoria de onda de Airy, que é uma descrição linearizada da propagação de ondas de gravidade sobre a superfície de uma camada de um fluido homogêneo, e a partir dela obteremos o comportamento dinâmico das ondas do mar. A teoria parte do sistema ilustrado na figura 1.1 onde temos a água do mar ocupando o espaço entre o fundo do oceano e a atmosfera.

Nós nos apoiaremos nas seguintes hipóteses:

- Em nosso sistema, a água se comporta como um fluido perfeito, homogêneo e incompressível e seu fluxo é irrotacional.
- A profundidade é constante e igual a  $-h$  e a superfície de contato da água com a atmosfera é definida pela expressão  $z = \eta(x, y, t)$ .
- A pressão atmosférica é igual a  $P_0$ .

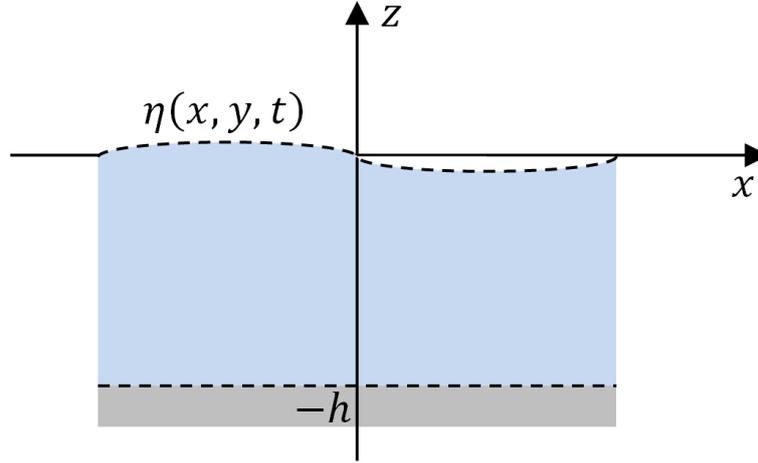


Figura 1.1: Sistema a ser considerado

A hipótese do fluido perfeito significa que estamos desprezando os efeitos da viscosidade e da tensão superficial. Ao considerarmos que o fluxo é irrotacional, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0} \quad (1.1)$$

onde  $\vec{u}(x, y, z, t)$  é a velocidade do fluido num determinado ponto num determinado instante de tempo. A equação 1.1 nos permite descrever o movimento do fluido a partir de uma função escalar  $\phi$  chamada de *função potencial*:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad (1.2)$$

A fato de o fluido ser incompressível é expresso pela relação:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.3)$$

de modo que temos:

$$\Delta \phi = 0 \quad (1.4)$$

Com relação às condições de contorno, temos que a velocidade ao longo do eixo  $z$  no fundo é nula:

$$\vec{u}(x, y, -h, t) \cdot \vec{e}_z = \vec{\nabla} \phi(x, y, -h, t) \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, -h, t) = 0 \quad (1.5)$$

que a velocidade ao longo do eixo  $z$  na superfície em contato com a atmosfera  $z = \eta$  é igual à derivada material:

$$\begin{aligned} \vec{u}(x, y, \eta, t) \cdot \vec{e}_z &= \vec{\nabla} \phi(x, y, \eta, t) \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, \eta, t) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \eta \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \eta \end{aligned} \quad (1.6)$$

e que a pressão nessa superfície é  $P_0$ :

$$p(x, y, \eta, t) = P_0 \quad (1.7)$$

A equação de Navier-Stokes para a conservação da quantidade de movimento para fluido perfeito é dada por:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}) \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (1.8)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\vec{\nabla} \vec{u}$  é o gradiente da velocidade<sup>1</sup> e  $\vec{f}$  são as forças por unidade de volume às quais o fluido é submetido, que nesse caso é seu próprio peso.

$$\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z \quad (1.9)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Temos assim:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}) = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - g \vec{e}_z \quad (1.10)$$

Sabendo que a para qualquer campo de vetores a identidade abaixo é válida:

$$\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}) = \vec{\nabla} \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} \quad (1.11)$$

temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) &= -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla}(gz + k) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{\nabla} \phi\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz &= k \end{aligned} \quad (1.12)$$

que nada mais é que uma forma generalizada da equação de Bernoulli. O fato de a constante  $k$  ainda não ter sido determinada nos indica que o potencial  $\phi$  não é único. Ao longo da superfície em contato com a atmosfera, temos  $z = \eta$  e  $p = P_0$ , de modo que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{\nabla} \phi\|^2}{2} + g\eta = -\frac{P_0}{\rho} + k = cte$$

Fixando  $k = \frac{P_0}{\rho}$ , temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{\nabla} \phi\|^2}{2} + g\eta = 0 \quad (1.13)$$

As equações 1.6 e 1.13, que relacionam as funções  $\phi$  e  $\eta$ , descrevem o comportamento do fluido na superfície em contato com a atmosfera. O resto do domínio é regido pela equação 1.4.

### 1.1.2 Ondas progressivas periódicas

Nós procuraremos soluções para  $\eta$  e  $\phi$  na forma

$$\eta(x, y, t) = A e^{j(k_x x + k_y y - \omega t)} = A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.14)$$

$$\phi(x, y, z, t) = f(z) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.15)$$

onde o vetor  $\vec{k}$  é o vetor número de onda:

---

<sup>1</sup>o gradiente de um vetor é um tensor de ordem 2

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Substituindo 1.15 em 1.4:

$$\Delta\phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = [-k_x^2 f(z) - k_y^2 f(z) + f''(z)] e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0$$

Introduzindo a norma do vetor número de onda  $\|\vec{k}\|^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2$ , temos:

$$f''(z) = k^2 f(z) \quad (1.17)$$

$$f(z) = C_0 e^{kz} + C_1 e^{-kz} = B_0 \cosh(kz) + B_1 \sinh(kz) = A_0 \cosh[k(z+h)] + A_1 \sinh[k(z+h)]$$

onde  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $A_0$  e  $A_1$  são constantes que dependem das condições de contorno. No fundo do mar tais condições são expressas pela equação 1.5, de modo que temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, -h, t) = f'(-h) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0$$

$$A_0 k \sinh[k(-h+h)] + A_1 k \cosh[k(-h+h)] = A_1 k = 0$$

$$A_1 = 0 \quad (1.18)$$

Temos assim:

$$\phi(x, y, z, t) = A_0 \cosh[k(z+h)] e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.19)$$

Convém aqui fazermos uma pausa e explicarmos a significado físico de algumas grandezas.

A solução  $\eta$  proposta em 1.14 é a expressão de uma onda plana progressiva tridimensional, e sua forma está ilustrada na figura 1.2. O vetor número de onda  $\vec{k}$  indica a direção da propagação (como sua componente em  $z$  é nula, a onda se propaga paralela ao fundo do mar) e  $\omega$  é a frequência angular. Temos assim:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.20)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.21)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento da onda e  $T$  seu período.

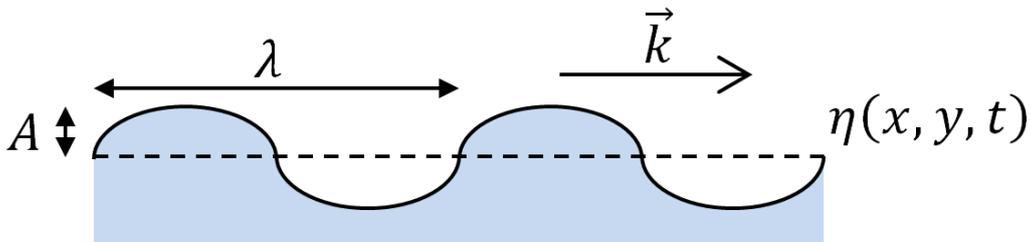


Figura 1.2: Função  $\eta$  expressa como uma onda plana progressiva tridimensional

Para calcularmos a velocidade do fluido em cada ponto, precisamos determinar o coeficiente  $A_0$  da expressão 1.19, e faremos isso linearizando as equações 1.6 e 1.13 que regem a dinâmica do fluido na superfície em contato com a atmosfera.

### 1.1.3 Linearização

Para pequenas perturbações na superfície da água, a amplitude das ondas é muito menor que seu comprimento de onda ( $A \ll \lambda$ ), de modo que temos:

$$A \ll \frac{2\pi}{k} \longrightarrow Ak = \epsilon \ll 1$$

As funções  $\phi$  e  $\eta$  podem ser postas em função de  $\epsilon$ :

$$\phi = \epsilon\phi_1(x, y, z, t) \quad (1.22)$$

$$\eta = \epsilon\eta_1(x, y, t) \quad (1.23)$$

$$\phi_1(x, y, z, t) = \frac{A_0}{Ak} \cosh[k(z+h)] e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (1.24)$$

$$\eta_1(x, y, z, t) = \frac{1}{k} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (1.25)$$

Substituindo na equação 1.6

$$\begin{aligned} \frac{\partial\epsilon\phi_1}{\partial z} &= \frac{\partial\epsilon\eta_1}{\partial t} + \vec{\nabla}\epsilon\phi_1 \cdot \vec{\nabla}\epsilon\eta_1 \\ \epsilon \frac{\partial\phi_1}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial\eta_1}{\partial t} + \epsilon^2 \vec{\nabla}\phi_1 \cdot \vec{\nabla}\eta_1 \end{aligned} \quad (1.26)$$

e na equação 1.13

$$\begin{aligned} \frac{\partial\epsilon\phi_1}{\partial t} + \frac{\|\vec{\nabla}\epsilon\phi_1\|^2}{2} + g\epsilon\eta_1 &= 0 \\ \epsilon \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\|\vec{\nabla}\phi_1\|^2}{2} + \epsilon g\eta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

e desprezando os termos dependentes de  $\epsilon^2$ , temos:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\eta_1}{\partial t} = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + g\eta_1 = 0 \quad (1.29)$$

Substituindo 1.24 e 1.25 nas equações acima para  $z = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\eta_1}{\partial t} &= k \frac{A_0}{Ak} \sinh(kh) e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + j\omega \frac{1}{k} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + g\eta_1 &= -j\omega \frac{A_0}{Ak} \cosh(kh) e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + g \frac{1}{k} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} k \sinh(kh) & j\omega \\ -j\omega \cosh(kh) & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Para que o sistema tenha soluções não nulas, temos:

$$\begin{vmatrix} k \sinh(kh) & j\omega \\ -j\omega \cosh(kh) & g \end{vmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

$$j\omega \cosh(kh)j\omega + gk \sinh(kh) = 0$$

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (1.32)$$

$$A_0 = -j \frac{Ag}{\omega \cosh(kh)} = -j \frac{A\omega}{k \sinh(kh)} \quad (1.33)$$

Assim, a função potencial é dada por:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{Ag}{\omega \cosh(kh)} \cosh[k(z+h)] e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (1.34)$$

$$= \frac{A\omega}{k \sinh(kh)} \cosh[k(z+h)] e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (1.35)$$

A equação 1.32 é extremamente importante pois ela nos diz como  $k$  e  $\omega$  estão relacionados, e no estudo de ondas vemos que as relações entre essas duas grandezas determinam as velocidade de fase e de grupo.

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh(kh) \longrightarrow v_p = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)}$$

$$\begin{aligned} v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} &= \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{gk \tanh(kh)} = \frac{g \tanh(kh) + gk h \operatorname{sech}^2(kh)}{2\sqrt{gk \tanh(kh)}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} + \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \frac{1}{\tanh(kh)} \frac{kh}{\cosh^2(kh)} \right] \\ &= \frac{1}{2} v_p \left[ 1 + \frac{kh}{\sinh(kh) \cosh(kh)} \right] \\ &= \frac{1}{2} v_p \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \end{aligned}$$

Vamos analisar dois casos particulares dessas equações.

## Águas rasas

Caso o comprimento de onda seja muito maior que a profundidade do mar ( $\lambda \gg h$ ), temos<sup>2</sup>:

$$h \ll \frac{2\pi}{k} \longrightarrow kh \ll 1 \longrightarrow \tanh(kh) \approx kh$$

$$\omega^2 = ghk^2$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = gh \longrightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

$$\omega = k\sqrt{gh} \longrightarrow v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{gh}$$

<sup>2</sup>quando dizemos “águas rasas” (em inglês, *shallow water*), a profundidade é comparada com o comprimento de onda. No exemplo numérico apresentado, a profundidade tida como rasa tem 4000m.

A velocidade de grupo sendo igual à de fase, temos que as ondas não são dispersivas (todas suas componentes harmônicas viajam a uma mesma velocidade).

Como exemplo numérico, vamos considerar que a profundidade média dos oceanos é de  $4000m$ . Temos assim:

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{10m.s^{-2}.4000m} = 200m.s^{-1}$$

A essa velocidade, percorre-se a circunferência da Terra ( $40.000km$ ) em 55,6 horas, aproximadamente dois dias. Isso explica o fenômeno conhecido como *idade da maré*, em que o momento onde ocorrem os máximos e mínimos das marés estão atrasados de aproximadamente 2 dias de cada uma das fases da Lua. A figura 1.3 ilustra esse fenômeno.

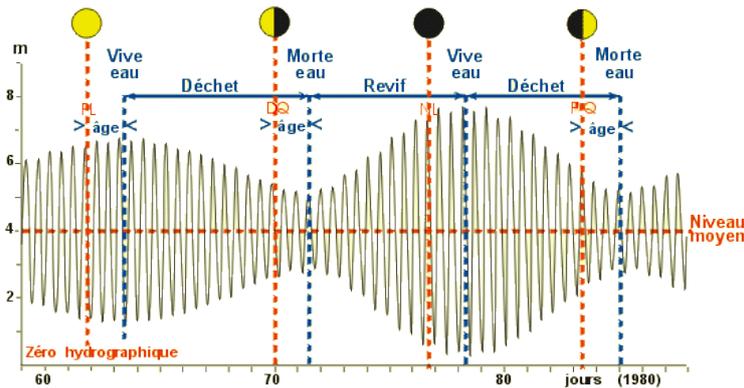


Figura 1.3: Fenômeno da idade da maré. Observe que o momento em que a maré é máxima (ou mínima, tracejado azul) está aproximadamente dois dias atrasado da respectiva fase da Lua (tracejado vermelho)

## Águas profundas

Caso o comprimento de onda seja muito menor que a profundidade do mar ( $\lambda \ll h$ ), temos:

$$h \gg \frac{2\pi}{k} \longrightarrow kh \gg 1 \longrightarrow \tanh(kh) \approx 1$$

$$\omega^2 = gk$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \longrightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{gk} \longrightarrow v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_p}{2}$$

Assim, a velocidade de grupo é diferente da de fase, o que indica que as ondas são dispersivas (ou seja, que cada uma das suas componentes harmônicas viaja a uma dada velocidade). A velocidade de fase pode ser expressa na forma

$$v_p = \frac{g}{\omega} \quad (1.36)$$

essa expressão nos diz que um onda com uma pulsação reduzida viaja mais rapidamente que uma com pulsação elevada: uma onda na praia pode ser a mensageira de uma tempestade em alto mar.

A condição  $kh \gg 1$  implica que:

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} = e^{kz}$$

de forma que a equação 1.35 fica na forma:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{A\omega}{k} e^{kz} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (1.37)$$

Pela definição da função potencial em 1.2, temos:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{A\omega}{k} \begin{pmatrix} jk_x \\ jk_y \\ k \end{pmatrix} e^{kz} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{A\omega}{k} \left[ \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] e^{kz} \quad (1.38)$$

Vamos adimensionar essas equações introduzindo as seguintes variáveis:

$$\bar{x} = kx \quad (1.39)$$

$$\bar{y} = ky \quad (1.40)$$

$$\bar{z} = kz \quad (1.41)$$

$$\bar{t} = \omega t \quad (1.42)$$

Temos assim:

$$\frac{d}{d\bar{t}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \epsilon \left[ \begin{pmatrix} \frac{k_x}{k} \\ \frac{k_y}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{k_x}{k}\bar{x} + \frac{k_y}{k}\bar{y} - \bar{t}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{k_x}{k}\bar{x} + \frac{k_y}{k}\bar{y} - \bar{t}\right) \right] e^{\bar{z}} \quad (1.43)$$

De modo a simplificarmos a análise, suporemos que o vetor número de onda é paralelo ao eixo  $x$ , de modo que temos<sup>3</sup>:

$$k_y = 0; \|\vec{k}\| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_x$$

Temos assim:

$$\frac{d}{d\bar{t}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \epsilon \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\bar{x} - \bar{t}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\bar{x} - \bar{t}) \right] e^{\bar{z}} \quad (1.44)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = 0 \longrightarrow \bar{y} = Y_i \quad (1.45)$$

<sup>3</sup>Essa hipótese não é diferente de uma simples mudança de referencial  $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ ,  $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$  onde  $\theta = \arctan(\frac{k_y}{k_x})$ , ou seja, orientar os eixos coordenados na direção de propagação da onda.

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \epsilon \cos(\bar{x} - \bar{t}) e^{\bar{z}} \quad (1.46)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \epsilon \sin(\bar{x} - \bar{t}) e^{\bar{z}} \quad (1.47)$$

Obtemos assim um sistema de equações diferenciais não-lineares, cuja solução analítica exata não nos é disponível. Entretanto, tentaremos aproximar sua solução por meio do método das perturbações. Tal método consiste em procurar trajetórias na forma:

$$\bar{x}(\bar{t}) = \bar{x}_0(\bar{t}) + \epsilon \bar{x}_1(\bar{t}) + O(\epsilon^2) \quad (1.48)$$

$$\bar{z}(\bar{t}) = \bar{z}_0(\bar{t}) + \epsilon \bar{z}_1(\bar{t}) + O(\epsilon^2) \quad (1.49)$$

e resolver o sistema para cada uma das ordens de  $\epsilon$ . Temos assim:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0 + \epsilon \dot{\bar{x}}_1 &= \epsilon \cos(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 - \bar{t}) e^{\bar{z}_0 + \epsilon \bar{z}_1} \\ \dot{\bar{z}}_0 + \epsilon \dot{\bar{z}}_1 &= \epsilon \sin(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 - \bar{t}) e^{\bar{z}_0 + \epsilon \bar{z}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 - \bar{t}) &= \cos(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1) \cos(\bar{t}) + \sin(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1) \sin(\bar{t}) \\ &= \left[ 1 - \frac{\bar{x}_0^2}{2} - \epsilon \bar{x}_0 \bar{x}_1 + O(\epsilon^2) \right] \cos(\bar{t}) + [\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + O(\epsilon^2)] \sin(\bar{t}) \\ \sin(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 - \bar{t}) &= \sin(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1) \cos(\bar{t}) - \cos(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1) \sin(\bar{t}) \\ &= [\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + O(\epsilon^2)] \cos(\bar{t}) - \left[ 1 - \frac{\bar{x}_0^2}{2} - \epsilon \bar{x}_0 \bar{x}_1 + O(\epsilon^2) \right] \sin(\bar{t}) \\ e^{\bar{z}_0 + \epsilon \bar{z}_1} &= e^{\bar{z}_0} [1 + \epsilon \bar{z}_1 + O(\epsilon^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0 + \epsilon \dot{\bar{x}}_1 &= \epsilon \left\{ \left[ 1 - \frac{\bar{x}_0^2}{2} - \epsilon \bar{x}_0 \bar{x}_1 + O(\epsilon^2) \right] \cos(\bar{t}) + [\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + O(\epsilon^2)] \sin(\bar{t}) \right\} e^{\bar{z}_0} [1 + \epsilon \bar{z}_1 + O(\epsilon^2)] \\ \dot{\bar{z}}_0 + \epsilon \dot{\bar{z}}_1 &= \epsilon \left\{ [\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + O(\epsilon^2)] \cos(\bar{t}) - \left[ 1 - \frac{\bar{x}_0^2}{2} - \epsilon \bar{x}_0 \bar{x}_1 + O(\epsilon^2) \right] \sin(\bar{t}) \right\} e^{\bar{z}_0} [1 + \epsilon \bar{z}_1 + O(\epsilon^2)] \end{aligned}$$

resolvendo o sistema em ordem zero, temos:

$$\dot{\bar{x}}_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \bar{x}_0 = X_0 \quad (1.50)$$

$$\dot{\bar{z}}_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \bar{z}_0 = Z_0 \quad (1.51)$$

ou seja, a aproximação em ordem zero nos diz que as partículas não se movem. Em primeira ordem temos:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \left[ \left( 1 - \frac{X_0^2}{2} \right) \cos(\bar{t}) + X_0 \sin(\bar{t}) \right] e^{Z_0} \\ \dot{\bar{z}}_1 &= \left[ X_0 \cos(\bar{t}) - \left( 1 - \frac{X_0^2}{2} \right) \sin(\bar{t}) \right] e^{Z_0} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_1 = \left[ \left( 1 - \frac{X_0^2}{2} \right) \sin(\bar{t}) - X_0 \cos(\bar{t}) \right] e^{Z_0} + X_1 \quad (1.52)$$

$$\bar{z}_1 = \left[ X_0 \sin(\bar{t}) + \left( 1 - \frac{X_0^2}{2} \right) \cos(\bar{t}) \right] e^{Z_0} + Z_1 \quad (1.53)$$

Temos assim:

$$\bar{x}(\bar{t}) = X_0 + \epsilon \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{X_0^2}{2} \right) \sin(\bar{t}) - X_0 \cos(\bar{t}) \right] e^{Z_0} + X_1 \right\} \quad (1.54)$$

$$\bar{z}(\bar{t}) = Z_0 + \epsilon \left\{ \left[ X_0 \sin(\bar{t}) + \left( 1 - \frac{X_0^2}{2} \right) \cos(\bar{t}) \right] e^{Z_0} + Z_1 \right\} \quad (1.55)$$

ou seja, a aproximação em primeira ordem nos diz que as partículas descrevem trajetórias elípticas em volta do ponto  $(X_0, Z_0)$ . Os semi-eixos dessas elipses são multiplicados por um fator  $e^{Z_0}$ , o que indica que, a medida que a profundidade aumenta, o tamanho das elipses diminuem. A figura 1.4 ilustra essas trajetórias a partir das expressões acima obtidas para  $\epsilon = 0,05$ , enquanto que a figura 1.5 nos mostra as trajetórias obtidas a partir de um ensaio experimental.

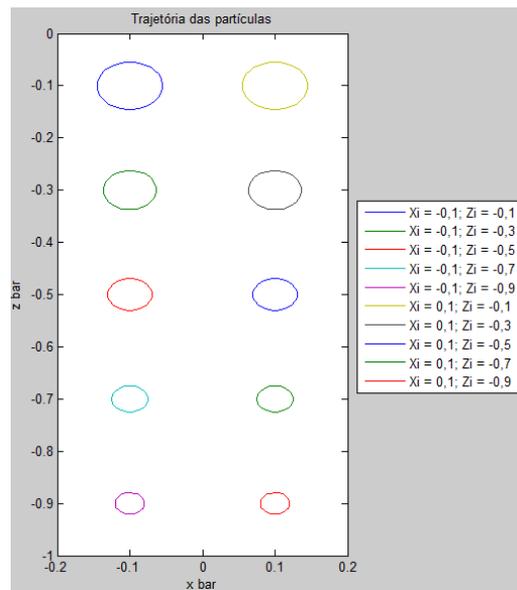


Figura 1.4: Trajetórias das partículas numa aproximação de primeira ordem

As expressões obtidas em 1.54 e 1.55 são aproximações analíticas da trajetória das partículas do fluido, uma vez que não temos uma solução exata. Entretanto, poderíamos ter optado pela obtenção de uma solução numérica das equações 1.46 e 1.47. Utilizando um programa escrito em Matlab, calculando as soluções das equações diferenciais numericamente pelo método de Runge-Kutta de duas variáveis de ordem 4, sobre um período de tempo de  $\bar{T} = 30\pi$ , com um passo de discretização de  $h = \frac{\pi}{10}$ , para  $\epsilon = 0,05$  obtemos os resultados exibidos no gráfico da figura 1.7.

Observamos que o movimento elíptico é sobreposto a um deslocamento no sentido de propagação da onda. Tal deslocamento, chamado de *deriva de Stokes*<sup>4</sup>, varia de intensidade em função da profundidade: quanto mais profundo, menor a velocidade de deriva das partículas.

<sup>4</sup>em inglês, *Stokes drift*

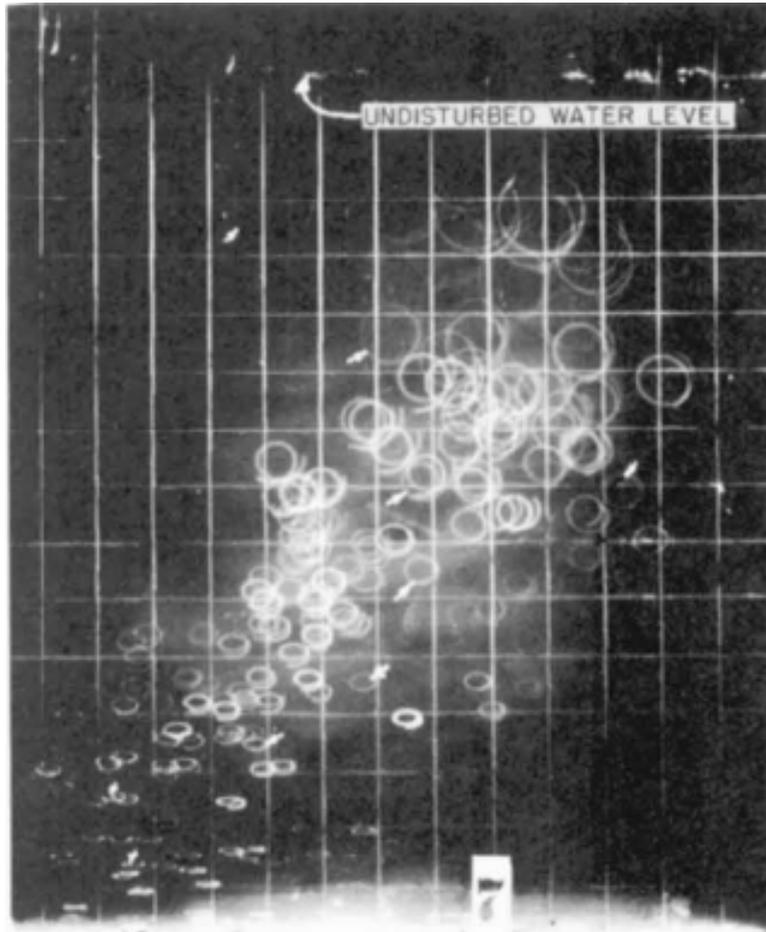


Figura 1.5: Fotografia de partículas na água sob a ação de uma onda de superfície progressiva e periódica. Resultados obtidos para  $-h = 2,50ft(0,76m)$ ,  $A = 0,339ft(0,103m)$ ,  $\lambda = 6,42ft(1,96m)$  e  $T = 1.12s$ . [2]

A fim de estimarmos o valor dessa velocidade, introduziremos a grandeza vetorial *excursão da partícula*  $\vec{\xi}$ :

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} = \vec{u} \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} = \frac{A\omega}{k} \left[ \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] e^{kz} \quad (1.57)$$

Supondo mais uma vez que  $k_y = 0$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_z \end{pmatrix} = A\omega \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kx - \omega t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(kx - \omega t) \right] e^{kz}$$

$$\xi_x = X - A \sin(kx - \omega t) e^{kz} \quad (1.58)$$

$$\xi_z = Z + A \cos(kx - \omega t) e^{kz} \quad (1.59)$$

onde  $(X, Z)$  é um ponto de referência. A velocidade de deriva é dada pela diferença da velocidade horizontal entre os pontos  $\vec{\xi}$  e  $(X, Z)$ :

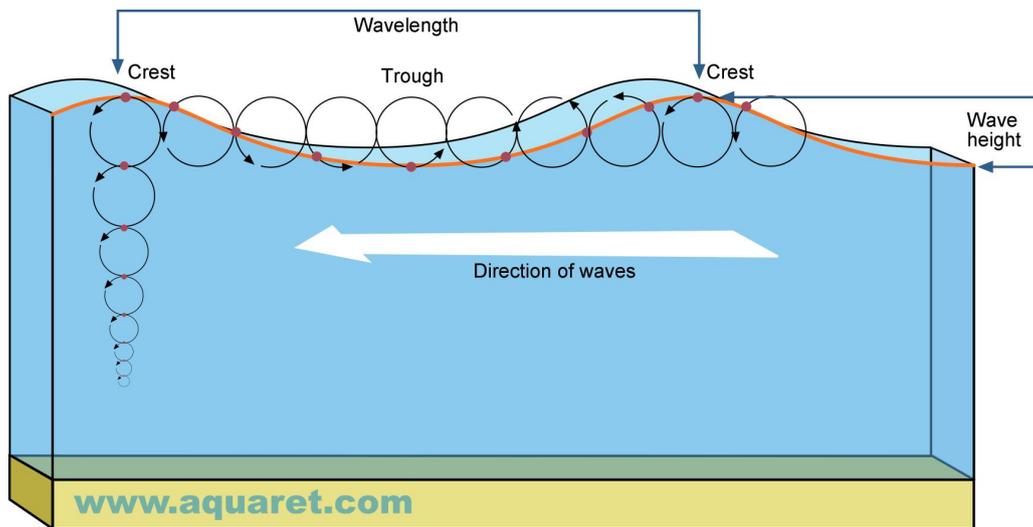


Figura 1.6: Trajetórias das partículas sob a ação de uma onda[5]

$$\begin{aligned}
 u_S &= u_x(\xi_x, \xi_z, t) - u_x(X, Z, t) \\
 &= [u_x(X, Z, t) + (\xi_x - X) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\xi_z - Z) \frac{\partial u_x}{\partial z} + O(\xi^2)] - u_x(X, Z, t) \\
 &\approx (\xi_x - X) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\xi_z - Z) \frac{\partial u_x}{\partial z} \\
 &= (\xi_x - X) \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t} + (\xi_z - Z) \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z \partial t} \\
 &= [X - A \sin(kx - \omega t)e^{kz} - X] \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} [X - A \sin(kx - \omega t)e^{kz}] \\
 &+ [Z + A \cos(kx - \omega t)e^{kz} - Z] \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} [X - A \sin(kx - \omega t)e^{kz}] \\
 &= \omega k A^2 e^{2kz} [\sin^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t)]
 \end{aligned}$$

Simplificando a expressão, obtemos:

$$u_S = \omega k A^2 e^{2kz} \quad (1.60)$$

### 1.1.4 Energia associada

A densidade de energia por área horizontal da onda é dada pela soma das energias cinética e potencial:

$$E(x, t) = K + U \quad (1.61)$$

$$= \int_{-h}^0 \frac{\rho}{2} \|\vec{u}(x, z, t)\|^2 dz + \int_0^{\eta(x, t)} \rho g z dz \quad (1.62)$$

O quadrado do módulo da velocidade pode ser calculado a partir de 1.35 e 1.2:

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u}\|^2 &= u_x^2 + u_z^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \\
 &= \frac{A^2 \omega^2}{\sinh^2(kh)} [\cosh^2[k(z+h)] \cos^2(kx - \omega t) + \sinh^2[k(z+h)] \sin^2(kx - \omega t)]
 \end{aligned}$$

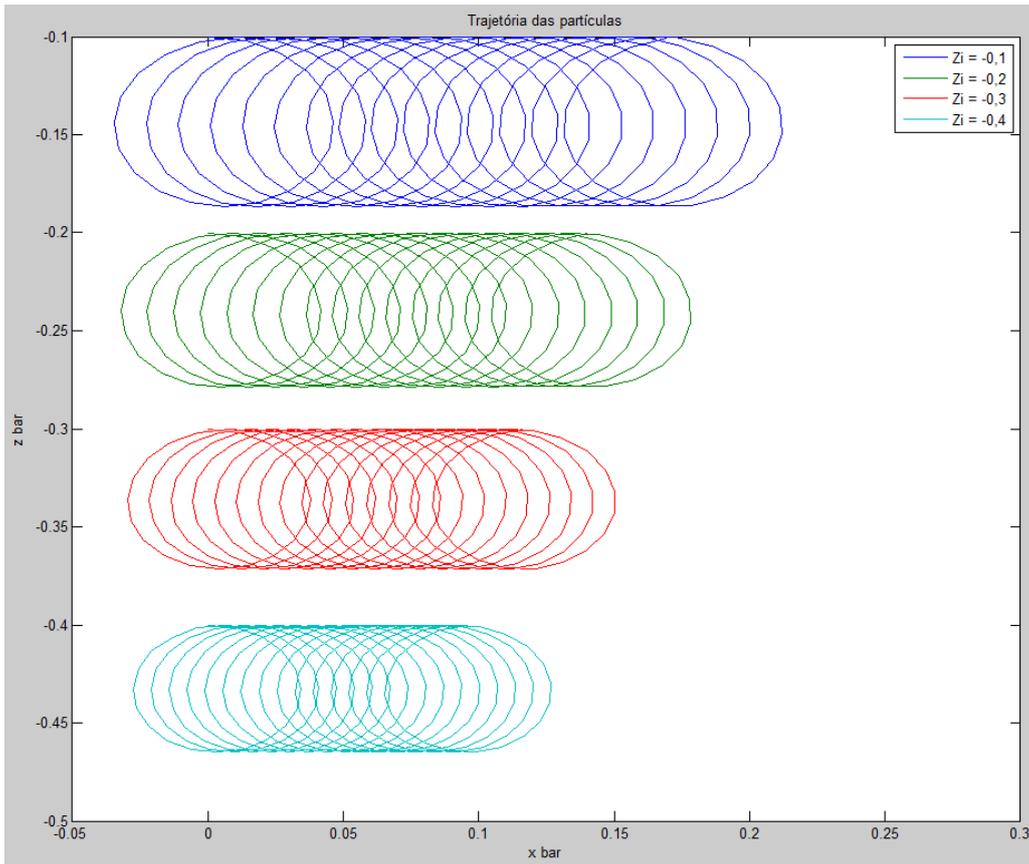


Figura 1.7: Solução numérica da trajetória das partículas quando submetidas à ação de uma onda de superfície para diferentes pontos iniciais de profundidade

Temos assim:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \|\vec{u}\|^2 dz &= \frac{A^2 \omega^2}{\sinh^2(kh)} \left[ \frac{2kh + \sinh(2kh)}{4k} \cos^2(kx - \omega t) + \frac{\sinh(2kh) - 2kh}{4k} \sin^2(kx - \omega t) \right] \\ &= \frac{A^2 \omega^2}{\sinh^2(kh)} \left\{ \frac{h}{2} \cos[2(kx - \omega t)] + \frac{\sinh(2kh)}{4k} \right\} \end{aligned}$$

Substituindo o termo  $\omega^2$  com o da expressão 1.32, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \|\vec{u}\|^2 dz &= \frac{A^2 g k \tanh(kh)}{\sinh^2(kh)} \left\{ \frac{h}{2} \cos[2(kx - \omega t)] + \frac{\sinh(2kh)}{4k} \right\} \\ &= \frac{g A^2 k}{\cosh(kh) \sinh(kh)} \left\{ \frac{h}{2} \cos[2(kx - \omega t)] + \frac{\sinh(2kh)}{4k} \right\} \\ &= g A^2 \frac{2k}{\sinh(2kh)} \left\{ \frac{h}{2} \cos[2(kx - \omega t)] + \frac{\sinh(2kh)}{4k} \right\} \\ &= \frac{g A^2}{2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \cos[2(kx - \omega t)] \right\} \end{aligned}$$

Já a integral da altura da onda é dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta(x,t)} z \, dz &= \frac{1}{2} [z^2]_0^{\eta(x,t)} \\ &= \frac{1}{2} A^2 \cos^2(k_x x - \omega t) \\ &= \frac{1}{4} A^2 \{1 - \cos[2(k_x x - \omega t)]\} \end{aligned}$$

Calculando a densidade de energia, temos:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \frac{\rho g A^2}{2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \cos[2(kx - \omega t)] \right\} + \rho g \frac{1}{4} A^2 \{1 - \cos[2(k_x x - \omega t)]\} \\ &= \frac{\rho g A^2}{4} \left\{ 2 + \left[ \frac{2kh}{\sinh(2kh)} - 1 \right] \cos[2(kx - \omega t)] \right\} \end{aligned}$$

O valor médio no tempo da densidade de energia por área horizontal é igual a:

$$\bar{E}(x, t) = \frac{\rho g A^2}{2} \quad (1.63)$$

Finalmente, o fluxo de potência na direção de propagação da onda por unidade de área horizontal é dado por:

$$P = \bar{E} v_g \quad (1.64)$$

onde  $v_g$  é a velocidade de grupo obtida a partir da expressão 1.32. Temos assim:

$$P = \frac{\rho g A^2}{4} v_p \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \quad (1.65)$$

### 1.1.5 Limites dos resultados obtidos

Todos os resultados obtidos até agora são válidos caso as hipóteses enunciadas desde o início sejam atendidas, que até agora foram as seguintes:

1. fluido perfeito, homogêneo e incompressível;
2. pequenas inclinações ( $A \ll \lambda$ ).

Essas hipóteses constituem os elementos da teoria mais simples da dinâmica das ondas (chamada de Teoria de Airy ou Stokes de primeira ordem). Existem outras teorias mais complexas onde várias dessas hipóteses simplificadoras são abandonadas, tais como a do fluido homogêneo e incompressível, a tensão superficial desprezível, o fluido inviscido, a amplitude de onda pequena, uma onda não interage com outra, etc.

O quadro da figura 1.8 mostra o domínio de validade das diferentes teorias que descrevem o comportamento de uma onda periódica num fluido.

Assim, ainda que existam teorias mais sofisticadas, nesse trabalho nos limitaremos aos estudos das ondas descritas pela teoria linear de Airy, de modo que teremos a atenção de limitar nossas análises aos seus domínios de validade.

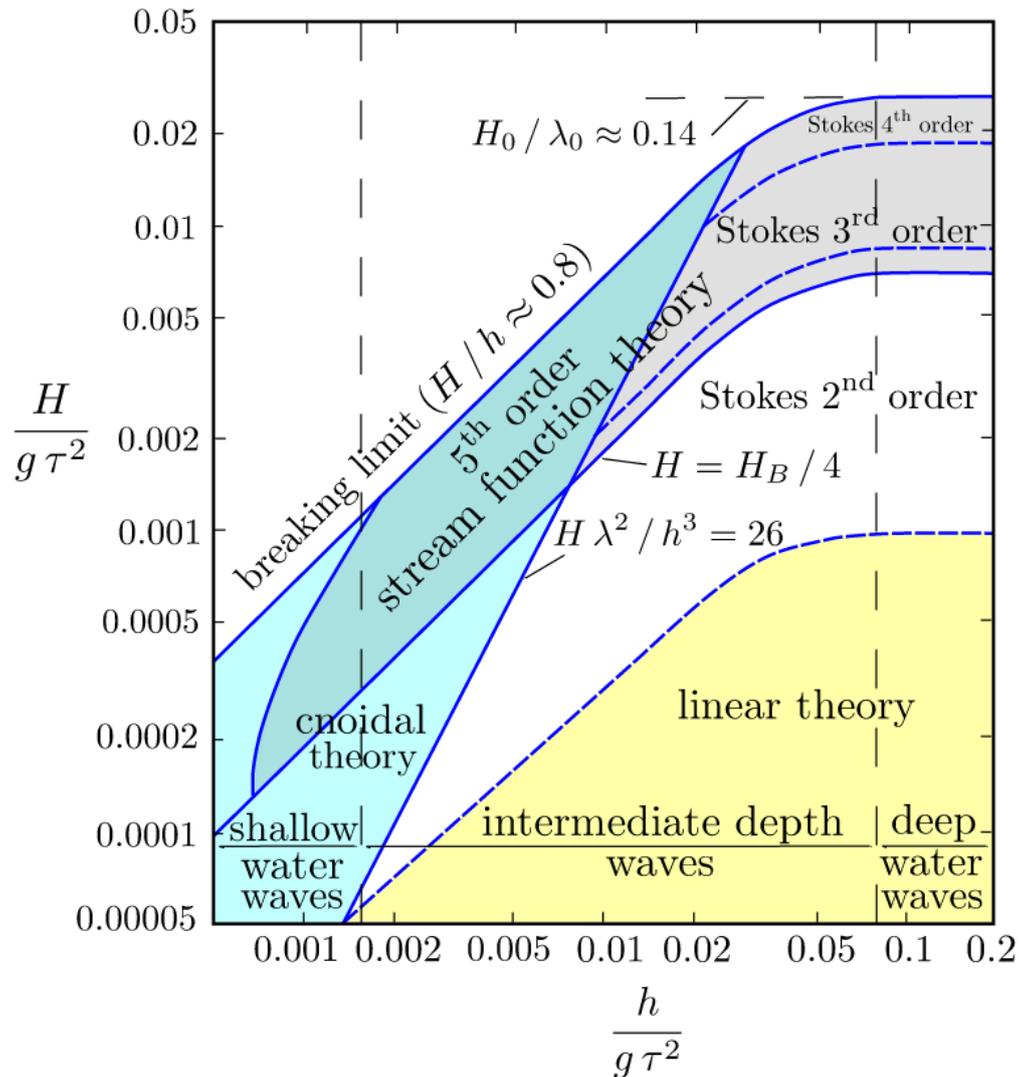


Figura 1.8: Validade das diversas teorias de ondas periódicas [3]. No gráfico,  $H$  indica a amplitude e  $\tau$  indica o período. Nos eixos, tanto a amplitude quanto a profundidade são comparados com a grandeza  $g\tau^2$ , que tem dimensão de comprimento e se relaciona com o comprimento de onda  $\lambda$ . No presente trabalho, estaremos restringindo nossa análise à região amarela, ou seja, da teoria linear de Airy.

### 1.1.6 Ondas aleatórias e decomposição espectral

A solução apresentada na seção 1.1.2 de uma onda harmônica progressiva pode ser generalizada para uma perturbação que cubra várias frequências do espectro. De fato, as ondas observadas na natureza podem ser decompostas como a soma de inúmeras ondas periódicas cujo o vetor de onda difere em magnitude e direção, assim como ilustrado na figura 1.9(a). Um exemplo de como a energia associada ao movimento de uma onda se distribui para cada frequência é apresentado na figura 1.9(b).

## 1.2 Coluna d'água oscilante

### 1.2.1 Diferentes técnicas de conversão da energia das ondas

Uma vez que temos um modelo que descreve a dinâmica das ondas do mar e sua energia associada, temos de transformar essa energia em movimento de uma peça sólida, que por sua vez

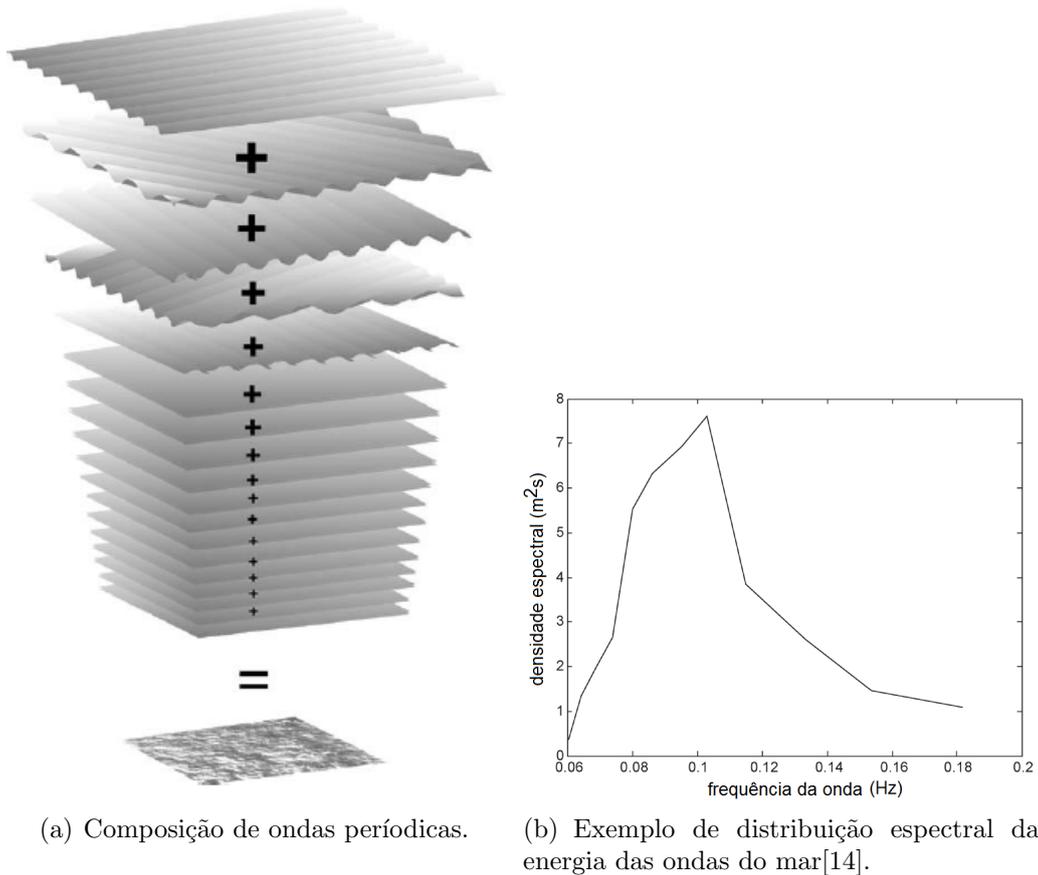


Figura 1.9: Ondas aleatórias se deslocando no tempo são equivalentes a soma de um grande número de componentes harmônicas, viajando através do oceano com diferentes períodos, direção, amplitudes e fase[13].

acionará o grupo turbo-gerador para a produção de eletricidade. Existem atualmente mais de 50 tipos de conversores de energia das ondas (WECs<sup>5</sup>) em diferentes estágios de desenvolvimento[4]. Mostraremos a seguir os princípios de funcionamento de alguns deles.

### Attenuator

Um atenuador é um dispositivo flutuante que opera paralelo à direção de propagação da onda e captura a energia do movimento relativo de dois braços no momento em que a onda passa por eles. O sistema está ilustrado na figura 1.10(a).

A fazenda de ondas de Aguçadoura (figura 1.11(a)), em Portugal, foi a primeira central undimotriz do mundo, contando com três máquinas que utilizam esse princípio e possuindo uma capacidade instalada de 2,25MW.

### Point absorber

Um flutuador oscila verticalmente devido a variação do nível do mar provocado pela ondas e esse movimento relativo ao fundo do mar é convertido em eletricidade. O sistema está ilustrado na figura 1.10(b).

<sup>5</sup>em inglês, *wave energy converters*

### Oscillating wave surge converter

O oscilador extrai a energia das ondas relativa ao movimento horizontal destas. Um braço oscila como um pêndulo montado num ponto articulado em resposta ao movimento da água. O sistema está ilustrado na figura 1.10(c).

### Overtopping devices

Dispositivos de transbordamento capturam a água da crista de uma onda e a armazenam dentro de um reservatório. A água então retorna ao mar passando por uma turbina que gera eletricidade. Esses dispositivos podem usar concentradores para acumular as ondas incidentes. O sistema está ilustrado na figura 1.10(d).

### Submerged pressure differential

Dispositivos submersos de pressão diferencial são tipicamente localizados perto da costa e instalados na areia do mar. A variação de pressão provocada pela passagem da onda faz o dispositivo oscilar. Esse princípio é muito similar ao *Point absorber*, com a diferença de que o conversor se encontra submerso. O sistema está ilustrado na figura 1.10(e).

### Bulge wave

Consiste em uma mangueira de borracha preenchida com água e ancorada no fundo do mar. A água entra numa ponta e a passagem da onda provoca variações de pressão ao longo do tubo. A água atravessa toda a mangueira e aciona uma turbina em sua outra extremidade, voltando para o mar. O sistema está ilustrado na figura 1.10(f).

### Rotating mass

A passagem da onda faz o dispositivo levantar e balançar, de modo a fazer com que uma massa desequilibrada execute um movimento de precessão, que por sua vez aciona um gerador elétrico. O sistema está ilustrado na figura 1.10(g).

### Oscillating bodies

Um flutuador oscila verticalmente devido a variação do nível do mar provocado pelas ondas e tal movimento é transmitido a um braço mecânico. Esse princípio é muito similar ao *Point absorber*, com a diferença de que o conversor se encontra em terra firme.

A instalação undimotriz experimental do porto de Pecém (figura 1.11(b)), no Ceará, com 100kW instalados, utiliza esse princípio: o braço mecânico aciona uma bomba hidráulica que enche um reservatório pressurizado, que por sua vez aciona uma turbina *Pelton* acoplada a um gerador[7].

## 1.2.2 Princípios da coluna d'água oscilante

O sistema de coluna d'água oscilante (OWC<sup>6</sup>) consiste na pressurização do ar contido dentro de uma câmara devido à variação do nível de água provocado por uma onda incidente. O princípio está ilustrado na figura 1.12(a).

A câmara pode ser feita de concreto ou de uma estrutura metálica e ela pode estar fixa junto ao litoral ou no meio do mar, presa no subsolo oceânico. Exteriormente, pode-se acrescentar um concentrador de ondas em volta da estrutura de modo de que as ondas incidentes em vários

---

<sup>6</sup>em inglês, *Oscillating Water Column*

pontos converja para a câmara. A abertura inferior deve ser larga o suficiente para que o volume de água deslocado pela onda possa entrar na câmara sem ser refletida mas não o bastante para que o ar comprimido por ela escape. Na abertura superior, geralmente com uma área menor, haverá um fluxo de ar pulsante cujo trabalho será nossa fonte de energia.

O fluxo de potência se dá da seguinte maneira: a energia mecânica transportada pela onda que se manifesta na forma de deslocamento de água incide sobre a estrutura, sendo que parte dessa energia é refletida na acima da abertura, outra parte abaixo, sendo que restante adentra a câmara, havendo mais uma vez uma reflexão, desta vez com a parede interior. Os restante da energia será transferida na forma de trabalho (pressão multiplicado pelo deslocamento do fluido) ao ar contido na câmara. A figura 1.12(b) ilustra a forma como se dá essa transferência de energia.

Esse fluxo pulsante de ar precisa ser convertido em movimento giratório de maneira a acionar uma máquina elétrica, e isso será feito com a instalação de uma turbina na saída superior da câmara.

### 1.3 Turbina *Wells* e grupo turbo-gerador

O desafio de converter um fluxo oscilatório de um fluido em movimento rotacional unidirecional foi solucionado com a invenção em 1976 das turbinas *Wells*, cujo nome se deve ao seu inventor, o engenheiro britânico Alan A. Wells. Devido ao seu perfil simétrico com relação ao plano ortogonal ao eixo, assim como ilustrado na figura 1.13, a incidência de um fluido em qualquer um dos sentidos fará com que ela gire sempre na mesma direção.

Sendo  $n$  o número de hélices da turbina,  $l$  a largura e  $b$  a espessura dessas hélices, a turbina pode ser caracterizada pela constante  $K$  dada por:

$$K = \frac{1}{2} \rho b l n \quad (1.66)$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar. A saída da câmara que tem a forma de duto cilíndrico de raio médio  $r$  e área  $a$ . Sendo  $v_x$  a velocidade do ar médio ao longo da seção transversal do duto, temos que o fluxo de ar  $q$  é dado por:

$$q = v_x a \quad (1.67)$$

Dividindo a velocidade  $v_x$  pelo produto do raio  $r$  com a velocidade  $\omega_t$  com a qual a turbina gira, obtemos a variável adimensional  $\phi$  chamada de *coeficiente de fluxo*.

$$\phi = \frac{v_x}{r \omega_t} \quad (1.68)$$

A queda de pressão e o torque desenvolvido pela turbina são dados pelas equações:

$$\Delta p_t = C_a \frac{K r^2}{a} (1 + \phi^2) \omega_t^2 \quad (1.69)$$

$$T_t = C_t K r^3 (1 + \phi^2) \omega_t^2 \quad (1.70)$$

onde  $C_a$  é o *coeficiente de potência* e  $C_t$  é o *coeficiente de torque*, ambos dependentes de  $\phi$ . As duas equações podem ser reunidas numa só substituindo o termo  $1 + \phi^2$ , obtendo assim:

$$T_t = \frac{C_t}{C_a} r a \Delta p_t \quad (1.71)$$

uma vez que  $r$  e  $a$  são constantes, temos que o torque é diretamente proporcional à queda de pressão ao longo da turbina e que a constante de proporcionalidade é a razão dos coeficientes

$\frac{C_t}{C_a}$ . A variação desses coeficientes em função de  $\phi$  é ilustrado nos gráficos da figura 1.14. Observando 1.14(a), vemos que existe um valor de  $\phi$  para o qual o coeficiente de torque é um ponto de máximo local. Assim, de forma a extrairmos a maior potência possível de nosso sistema mecânico, devemos fazer com que este opere com um valor próximo a este ponto.

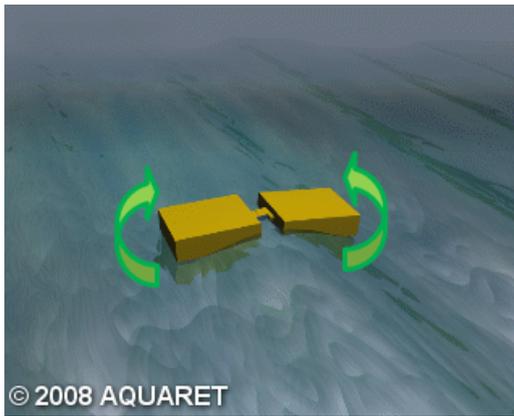
Uma vez que temos o valor do torque exercido pela turbina no gerador, temos que a resultante dos torques aplicados num eixo é proporcional à aceleração angular, e a constante de proporcionalidade é o momento de inércia  $J$  ao longo desse eixo. Sendo assim, a equação que governa a dinâmica mecânica do sistema é dada por:

$$T_{res} = J\alpha_R \quad (1.72)$$

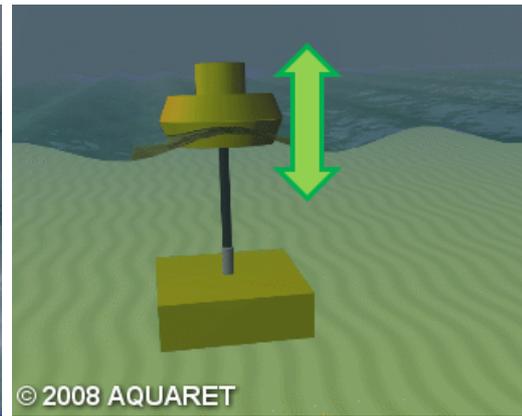
onde  $\alpha_R$  é a aceleração angular. O torque resultante é a soma do torque eletromagnético com o torque aplicado pela turbina, logo:

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \frac{d^2\theta_R}{dt^2} = \frac{1}{J}(T_t + T_e) \quad (1.73)$$

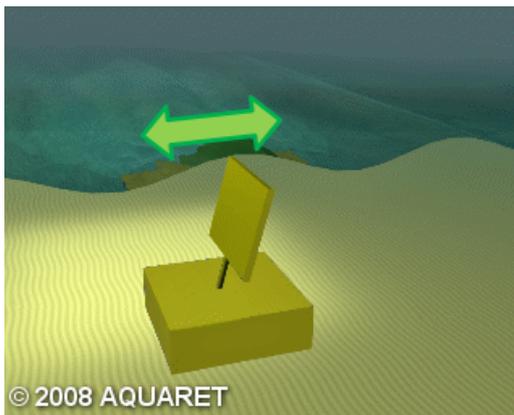
onde  $T_e < 0$  se o torque eletromagnético é resistente (caso a máquina elétrica opere como gerador) e  $T_e > 0$  se o torque eletromagnético é motor.



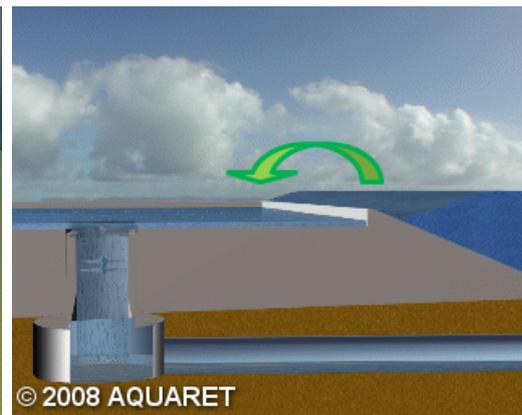
(a) Attenuator



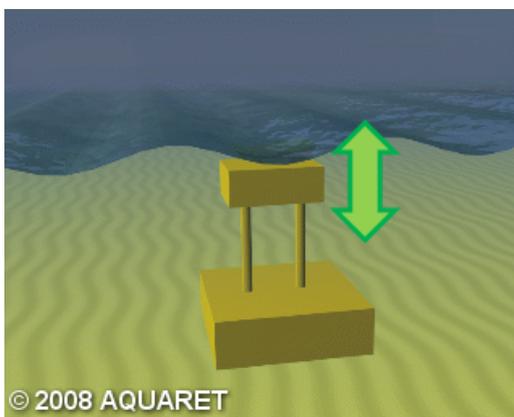
(b) Point absorber



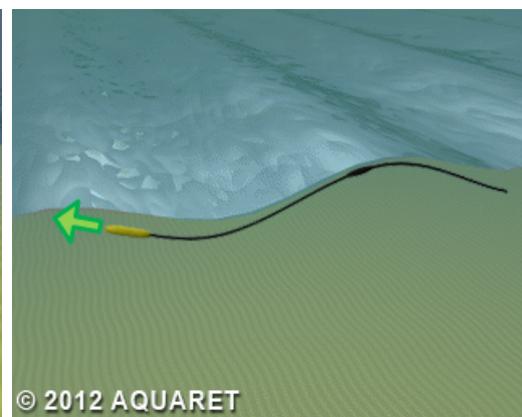
(c) Oscillating wave surge converter



(d) Overtopping devices



(e) Submerged pressure differential



(f) Bulge wave



(g) Rotating mass

Figura 1.10: Técnicas de conversão da energia das ondas[5]



(a) Fazenda de ondas de Aguçadoura



(b) Instalação experimental do porto de Pecém

Figura 1.11: Instalações undimotrizes

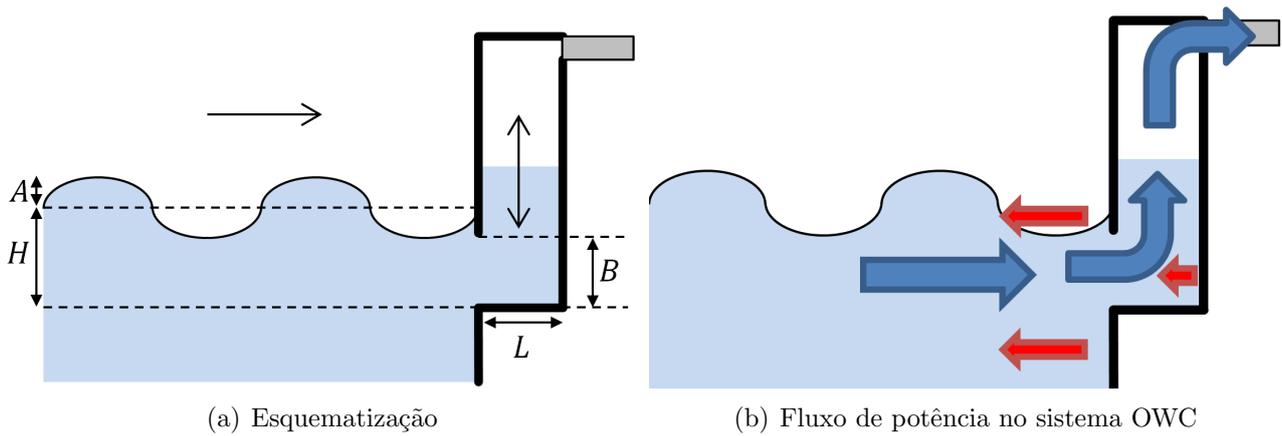


Figura 1.12: Coluna d'água oscilante

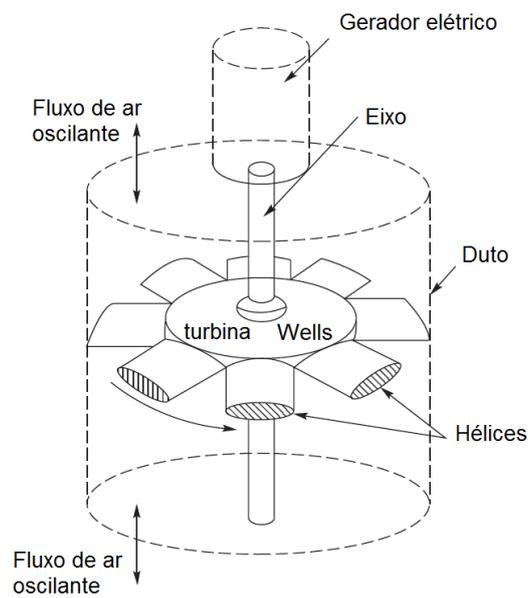


Figura 1.13: Turbina *Wells* (adaptado de Raghunathan et al., 1995).

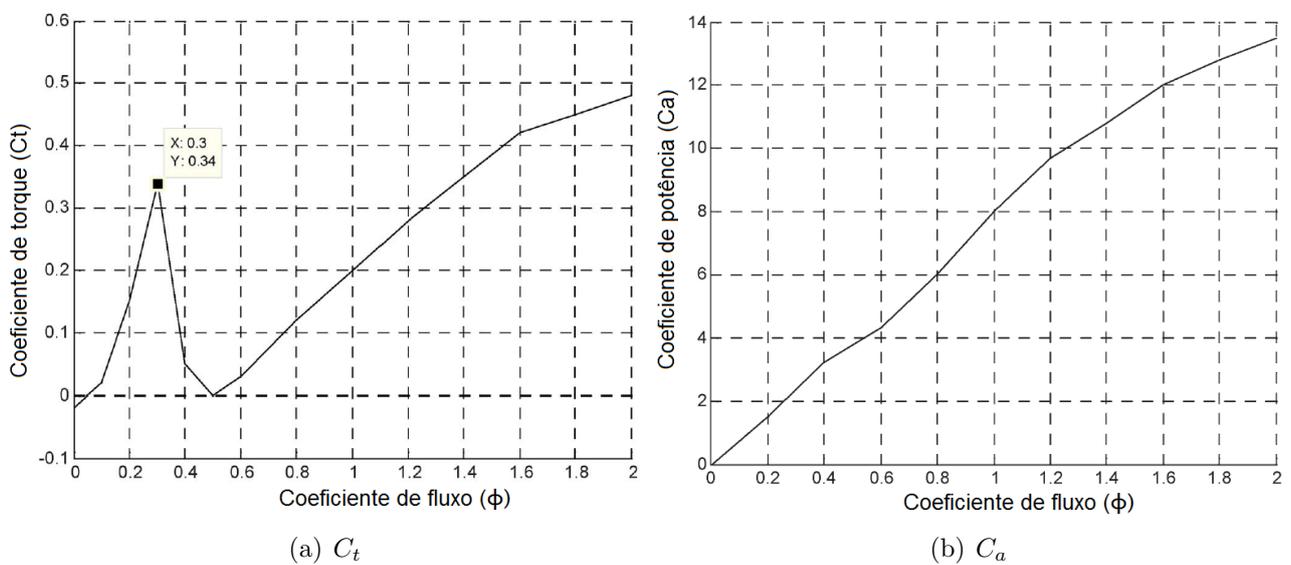


Figura 1.14: Coeficientes de torque e de potência[14].

# Capítulo 2

## Sistema elétrico

A thousand secrets of nature  
which I might have stumbled  
upon accidentally, I would have  
given for that one which I had  
wrested from her against all  
odds and at the peril of my  
existence.

---

Nikola Tesla[6]

Nessa seção, faremos uma análise do sistema de conversão da energia mecânica do movimento das ondas em energia elétrica. Uma vez que determinamos o comportamento da nossa fonte primária, estudaremos o como se dará o processo de geração de eletricidade procedendo com a modelização da máquina elétrica a ser utilizada, que nesse caso é o gerador de indução. Iniciaremos como uma pequena introdução sobre seu princípio de funcionamento para em seguida aprofundar e caracterizar as relações entre as grandezas associadas à energia nela produzida.

### 2.1 Modelização da máquina de indução

#### 2.1.1 Generalidades

A máquina de indução polifásica consiste em várias bobinas (enrolamentos que produzirão campo magnético) distribuídas ao longo de uma estrutura fixa chamada *estator*. Quando alimentadas com correntes alternadas no tempo, o campo magnético produzido por essas bobinas induz correntes na peça móvel do motor, o *rotor*, que gira em torno de um eixo que passa por dentro do estator. Essas correntes induzidas eletromagneticamente no rotor também variam com o tempo, produzindo outro campo magnético que interage com o aquele produzido pelas bobinas do estator, e é dessa interação que surge o torque eletromagnético desenvolvido pela máquina.

A seguir, explicitaremos através de equações essas relações acima descritas de modo que possamos obter meio quantitativos de avaliação do comportamento do motor.

#### 2.1.2 Circuito magnético

O enlace de fluxo em cada um dos enrolamentos da máquina é dado pela equação matricial:

$$\lambda_{\text{SR}} = \mathbf{L}i_{\text{SR}}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{SA} \\ \lambda_{SB} \\ \lambda_{SC} \\ \lambda_{RA} \\ \lambda_{RB} \\ \lambda_{RC} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{SC} \\ i_{RA} \\ i_{RB} \\ i_{RC} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

onde a matriz  $\mathbf{L}$  é dada por:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{Sl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Sm} \cos(\theta_E) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) \\ -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Sl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) \\ -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Sl} + L_{Sm} & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E) \\ L_{Sm} \cos(\theta_E) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & L_{Rl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} \\ L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Rl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} \\ L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & L_{Sm} \cos(\theta_E) & -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Rl} + L_{Sm} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $L_{Sm}$  é a indutância mútua máxima entre os enrolamentos de estator e rotor,  $L_{Sl}$  é a indutância de dispersão do estator,  $L_{Rl}$  é a indutância de dispersão do rotor e  $\theta_E$  é o ângulo elétrico, relacionado com mecânico do rotor através do número de pólos  $P$  da máquina:

$$\theta_E = \frac{P}{2} \theta_R \quad (2.3)$$

Separando a equação matricial em blocos, temos:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{SA} \\ \lambda_{SB} \\ \lambda_{SC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{Sl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} \\ -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Sl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} \\ -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Sl} + L_{Sm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{SC} \end{pmatrix} + L_{Sm} \begin{pmatrix} \cos(\theta_E) & \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_E) & \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{RA} \\ i_{RB} \\ i_{RC} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{RA} \\ \lambda_{RB} \\ \lambda_{RC} \end{pmatrix} = L_{Sm} \begin{pmatrix} \cos(\theta_E) & \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta_E) & \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta_E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{SC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{Rl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} \\ -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Rl} + L_{Sm} & -\frac{L_{Sm}}{2} \\ -\frac{L_{Sm}}{2} & -\frac{L_{Sm}}{2} & L_{Rl} + L_{Sm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{RA} \\ i_{RB} \\ i_{RC} \end{pmatrix}$$

sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas matrizes definidas por:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_E) & \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_E) & \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta_E - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta_E - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_E) \end{pmatrix}$$

as equações podem ser escritas na forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{SA} \\ \lambda_{SB} \\ \lambda_{SC} \end{pmatrix} = (L_{Sl} \mathbf{I} + L_{Sm} \mathbf{M}_1) \begin{pmatrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{SC} \end{pmatrix} + L_{Sm} \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} i_{RA} \\ i_{RB} \\ i_{RC} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{RA} \\ \lambda_{RB} \\ \lambda_{RC} \end{pmatrix} = L_{Sm} \mathbf{M}_2^T \begin{pmatrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{SC} \end{pmatrix} + (L_{Rl} \mathbf{I} + L_{Sm} \mathbf{M}_1) \begin{pmatrix} i_{RA} \\ i_{RB} \\ i_{RC} \end{pmatrix}$$

Aplicando a transformação de Fortescue aos vetores de enlaço de fluxo e corrente, temos:

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \lambda_{S1} \\ \lambda_{S2} \\ \lambda_{S0} \end{pmatrix} = (L_{Sl} \mathbf{I} + L_{Sm} \mathbf{M}_1) \mathbf{T} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S0} \end{pmatrix} + L_{Sm} \mathbf{M}_2 \mathbf{T} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \lambda_{R1} \\ \lambda_{R2} \\ \lambda_{R0} \end{pmatrix} = L_{Sm} \mathbf{M}_2^T \mathbf{T} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S0} \end{pmatrix} + (L_{Rl} \mathbf{I} + L_{Sm} \mathbf{M}_1) \mathbf{T} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R0} \end{pmatrix}$$

onde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Sabendo que

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{T} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{T} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{T} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} e^{j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{M}_2^T \mathbf{T} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} e^{-j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{S1} \\ \lambda_{S2} \\ \lambda_{S0} \end{pmatrix} = \left[ L_{Sl} \mathbf{I} + \frac{3L_{Sm}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S0} \end{pmatrix} + \frac{3L_{Sm}}{2} \begin{pmatrix} e^{j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{R1} \\ \lambda_{R2} \\ \lambda_{R0} \end{pmatrix} = \frac{3L_{Sm}}{2} \begin{pmatrix} e^{-j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S0} \end{pmatrix} + \left[ L_{Rl} \mathbf{I} + \frac{3L_{Sm}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R0} \end{pmatrix}$$

As equações referentes aos enlaces de fluxo e correntes homopolares não nos interessam, pois na maioria dos casos o motor é alimentado com apenas três cabos, sem o neutro, de modo que a soma das correntes das três fases é nula. Retirando-as das equações matriciais, temos:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{S1} \\ \lambda_{S2} \end{pmatrix} = \left( L_{Sl} + \frac{3L_{Sm}}{2} \right) \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \end{pmatrix} + \frac{3L_{Sm}}{2} \begin{pmatrix} e^{j\theta_E} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{R1} \\ \lambda_{R2} \end{pmatrix} = \frac{3L_{Sm}}{2} \begin{pmatrix} e^{-j\theta_E} & 0 \\ 0 & e^{j\theta_E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \end{pmatrix} + \left( L_{Rl} + \frac{3L_{Sm}}{2} \right) \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{S0} = L_{Sl} i_{S0}$$

$$\lambda_{R0} = L_{Rl} i_{R0}$$

A analisando as equações acima, vemos que elas possuem uma propriedade especial: os enlaces de fluxo de sequência positiva são iguais aos complexos conjugados dos enlaces de fluxo de sequência negativa.

$$\lambda_1 = \lambda_2^*$$

quando (*e tão somente quando*) temos um sistema que possua essa propriedade, é interessante introduzirmos o vetor espacial<sup>1</sup>:

$$\frac{3}{2}\vec{g} = g_A + g_B\alpha + g_C\alpha^2$$

$$g_1 = \frac{1}{2}\vec{g} \quad (2.5)$$

$$g_2 = \frac{1}{2}\vec{g}^* \quad (2.6)$$

fazendo a substituição nas equações acima, temos:

$$\vec{\lambda}_S = \left( L_{Sl} + \frac{3L_{Sm}}{2} \right) \vec{i}_S + \frac{3L_{Sm}}{2} e^{j\theta_E} \vec{i}_R$$

$$\vec{\lambda}_R = \frac{3L_{Sm}}{2} e^{-j\theta_E} \vec{i}_S + \left( L_{Rl} + \frac{3L_{Sm}}{2} \right) \vec{i}_R$$

Definindo a indutância de magnetização do motor:

$$M = \frac{3L_{Sm}}{2} \quad (2.7)$$

a indutância própria do estator  $L_S$ :

$$L_S = L_{Sl} + M \quad (2.8)$$

e a indutância própria do rotor  $L_R$ :

$$L_R = L_{Rl} + M \quad (2.9)$$

obtemos as equações:

$$\vec{\lambda}_S = L_S \vec{i}_S + M e^{j\theta_E} \vec{i}_R \quad (2.10)$$

$$\vec{\lambda}_R = M e^{-j\theta_E} \vec{i}_S + L_R \vec{i}_R \quad (2.11)$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \vec{\lambda}_S \\ \vec{\lambda}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_S & M e^{j\theta_E} \\ M e^{-j\theta_E} & L_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_S \\ \vec{i}_R \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Invertendo a relação de modo a obtermos a corrente em função dos enlaces de fluxo, temos:

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_S \\ \vec{i}_R \end{pmatrix} = \frac{1}{L_R L_S - M^2} \begin{pmatrix} L_R & -M e^{j\theta_E} \\ -M e^{-j\theta_E} & L_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_S \\ \vec{\lambda}_R \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Uma vez que a indutância própria de uma bobina é a soma da indutância mútua com a de dispersão, temos que:

---

<sup>1</sup>o fato de as grandezas de sequência positiva serem iguais aos complexos conjugados das grandezas de sequência negativa nos diz que as equações são redundantes, redundância essa que é eliminada com a introdução do vetor espacial.

$$0 \leq M^2 \leq (M + L_{Rl})(M + L_{Sl}) = L_R L_S \quad (2.14)$$

$$0 \leq \underbrace{\frac{M^2}{L_R L_S}}_{k^2} \leq 1 \quad (2.15)$$

onde  $k = \frac{M}{\sqrt{L_R L_S}}$  é o *coeficiente de acoplamento*. Quando o acoplamento magnético entre duas bobinas não é ideal, temos fluxo de dispersão em cada uma delas, que é avaliado pelo *coeficiente de dispersão*:

$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_R L_S} \quad (2.16)$$

Assim, a equação 2.13 pode ser escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_S \\ \vec{i}_R \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} \frac{1}{L_S} & -\frac{M}{L_R L_S} e^{j\theta_E} \\ -\frac{M}{L_R L_S} e^{-j\theta_E} & \frac{1}{L_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_S \\ \vec{\lambda}_R \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

### 2.1.3 Circuito elétrico

A tensão nos enrolamentos de estator é a soma da queda de tensão nas resistências devido à circulação de corrente mais a tensão induzida devida à variação do enlace de fluxo do circuito.

$$\begin{aligned} v_{SA} &= r_S i_{SA} + \frac{d}{dt} \lambda_{SA} \\ v_{SB} &= r_S i_{SB} + \frac{d}{dt} \lambda_{SB} \\ v_{SC} &= r_S i_{SC} + \frac{d}{dt} \lambda_{SC} \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação por  $\alpha$ , a terceira por  $\alpha^2$  e somando-as, temos:

$$\begin{aligned} v_{SA} + v_{SB}\alpha + v_{SC}\alpha^2 &= r_S i_{SA} + \frac{d}{dt} \lambda_{SA} + \left( r_S i_{SB} + \frac{d}{dt} \lambda_{SB} \right) \alpha + \left( r_S i_{SC} + \frac{d}{dt} \lambda_{SC} \right) \alpha^2 \\ &= r_S (i_{SA} + i_{SB}\alpha + i_{SC}\alpha^2) + \frac{d}{dt} (\lambda_{SA} + \lambda_{SB}\alpha + \lambda_{SC}\alpha^2) \end{aligned}$$

introduzindo os vetores espaciais de tensão, de corrente e de enlace de fluxo de estator, temos:

$$\vec{v}_S = r_S \vec{i}_S + \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_S \quad (2.18)$$

De maneira análoga, temos para os enrolamentos de rotor:

$$\begin{aligned} v_{RA} &= r_R i_{RA} + \frac{d}{dt} \lambda_{RA} \\ v_{RB} &= r_R i_{RB} + \frac{d}{dt} \lambda_{RB} \\ v_{RC} &= r_R i_{RC} + \frac{d}{dt} \lambda_{RC} \\ \vec{v}_R &= r_R \vec{i}_R + \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_R \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.1.4 Torque eletromagnético

O torque eletromagnético produzido no eixo da máquina é dado pela expressão:

$$T_e = \frac{dW'}{d\theta_R} \quad (2.20)$$

onde  $W'$  é a co-energia do sistema, calculada a partir da energia do sistema  $W$ :

$$W' = \mathbf{i}_{\text{SR}}^T \lambda_{\text{SR}} - W = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\text{SR}}^T \lambda_{\text{SR}} = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\text{SR}}^T \mathbf{L} \mathbf{i}_{\text{SR}} \quad (2.21)$$

substituindo 2.21 e 2.3 na equação 2.20, obtemos:

$$T_e = \frac{P}{2} \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\text{SR}}^T \frac{d\mathbf{L}}{d\theta_E} \mathbf{i}_{\text{SR}}$$

Analisando a matriz 2.2, vemos que somente os sub-blocos que relacionam as correntes de estator com os enlaces de fluxo de rotor e vice-versa dependem do ângulo elétrico, logo:

$$T_e = \frac{P}{2} \frac{1}{2} L_{Sm} \left( \mathbf{i}_{\text{S}}^T \frac{d\mathbf{M}_2}{d\theta_E} \mathbf{i}_{\text{R}} + \mathbf{i}_{\text{R}}^T \frac{d\mathbf{M}_2^T}{d\theta_E} \mathbf{i}_{\text{S}} \right)$$

Fazendo aparecer as matrizes de transformação de Fortescue:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{P}{2} \frac{L_{Sm}}{2} \left( \mathbf{i}_{\text{S}}^T \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \frac{d\mathbf{M}_2}{d\theta_E} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{i}_{\text{R}} + \mathbf{i}_{\text{R}}^T \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \frac{d\mathbf{M}_2^T}{d\theta_E} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{i}_{\text{S}} \right) \\ &= \frac{P}{2} \frac{L_{Sm}}{2} \left[ \mathbf{i}_{\text{S}}^T \mathbf{T} \frac{d}{d\theta_E} \frac{3}{2} \begin{pmatrix} e^{j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{i}_{\text{R}} + \mathbf{i}_{\text{R}}^T \mathbf{T} \frac{d}{d\theta_E} \frac{3}{2} \begin{pmatrix} e^{-j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{i}_{\text{S}} \right] \end{aligned}$$

sendo  $\mathbf{i}_{\text{R},120} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{i}_{\text{R}}$ ,  $\mathbf{i}_{\text{S},120} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{i}_{\text{S}}$ ,  $\mathbf{i}_{\text{R},120}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{i}_{\text{R}}^T \mathbf{T}$  e  $\mathbf{i}_{\text{S},120}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{i}_{\text{S}}^T \mathbf{T}$ , onde

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos assim:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{3P}{2} \frac{L_{Sm}}{2} \left[ 3 \mathbf{i}_{\text{S},120}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j e^{j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & -j e^{-j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{i}_{\text{R},120} + 3 \mathbf{i}_{\text{R},120}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -j e^{-j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & j e^{j\theta_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{i}_{\text{S},120} \right] \\ &= \frac{3P}{2} \frac{3L_{Sm}}{2} \left[ \mathbf{i}_{\text{S},120}^T \begin{pmatrix} 0 & -j e^{-j\theta_E} & 0 \\ j e^{j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{i}_{\text{R},120} + \mathbf{i}_{\text{R},120}^T \begin{pmatrix} 0 & j e^{j\theta_E} & 0 \\ -j e^{-j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{i}_{\text{S},120} \right] \\ &= \frac{3P}{2} M \left[ \begin{pmatrix} i_{S1} & i_{S2} & i_{S0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -j e^{-j\theta_E} & 0 \\ j e^{j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{R1} & i_{R2} & i_{R0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & j e^{j\theta_E} & 0 \\ -j e^{-j\theta_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S0} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{3P}{2} M (j i_{S2} i_{R1} e^{j\theta_E} - j i_{S1} i_{R2} e^{-j\theta_E} - j i_{R2} i_{S1} e^{-j\theta_E} + j i_{R1} i_{S2} e^{j\theta_E} +) \end{aligned}$$

$$= \frac{3P}{2} M (2ji_{S2}i_{R1}e^{j\theta_E} - 2ji_{S1}i_{R2}e^{-j\theta_E})$$

Substituindo as componentes de sequência positiva e negativa pelos vetores espaciais através das relações 2.5 e 2.6, temos:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{3P}{2} M \left( 2j \frac{\vec{i}_S^* \vec{i}_R}{2} e^{j\theta_E} - 2j \frac{\vec{i}_S \vec{i}_R^*}{2} e^{-j\theta_E} \right) \\ &= \frac{3P}{2} M \left[ \frac{j}{2} \left( \vec{i}_S^* (\vec{i}_R e^{j\theta_E}) - \vec{i}_S (\vec{i}_R e^{j\theta_E})^* \right) \right] \end{aligned}$$

Sabendo que  $a^*b - ab^* = 2jIm[a^*b] = -2jIm[ab^*]$ ,  $a$  e  $b \in \mathbb{C}$ , temos:

$$T_e = \frac{3P}{2} M Im \left[ \vec{i}_S (\vec{i}_R e^{j\theta_E})^* \right] \quad (2.22)$$

Fazendo substituições a partir dessa equação, podemos obter o torque em função de outras variáveis. O valor obtido de  $T_e$  será utilizada na equação da dinâmica mecânica 1.73 a fim de obter o valor da velocidade angular  $\omega_R$  a cada instante.

### 2.1.5 Conservação da energia

A potência elétrica de um circuito em função dos vetores espaciais de tensão e corrente é dada por:

$$p_e = \frac{3}{2} Re \left( \vec{v}_S \vec{i}_S^* \right) \quad (2.23)$$

substituindo 2.18, temos:

$$p_e = \frac{3}{2} Re \left[ \left( r_S \vec{i}_S + \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_S \right) \vec{i}_S^* \right] \quad (2.24)$$

$$= \frac{3}{2} Re \left[ r_S \vec{i}_S \vec{i}_S^* + \frac{d}{dt} \left( L_S \vec{i}_S + M e^{j\theta_E} \vec{i}_R \right) \vec{i}_S^* \right] \quad (2.25)$$

$$= \frac{3}{2} Re \left[ r_S \|\vec{i}_S\|^2 + L_S \frac{d\vec{i}_S}{dt} \vec{i}_S^* + M \frac{d}{dt} \left( e^{j\theta_E} \vec{i}_R \right) \vec{i}_S^* \right] \quad (2.26)$$

Pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{d}{dt} \left( e^{j\theta_E} \vec{i}_R \right) = \frac{d\theta_E}{dt} \frac{d}{d\theta_E} \left( e^{j\theta_E} \vec{i}_R \right) = j\omega_E \vec{i}_R e^{j\theta_E} \quad (2.27)$$

logo:

$$p_e = \frac{3}{2} Re \left[ r_S \|\vec{i}_S\|^2 + L_S \frac{d\vec{i}_S}{dt} \vec{i}_S^* + jM\omega_E \vec{i}_R e^{j\theta_E} \vec{i}_S^* \right] \quad (2.28)$$

Sabendo que  $Re[ja] = Im[a^*]$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , temos:

$$p_e = \underbrace{\frac{3}{2} r_S \|\vec{i}_S\|^2}_{P_{ohm}} + \underbrace{\frac{3}{2} Re \left[ L_S \frac{d\vec{i}_S}{dt} \vec{i}_S^* \right]}_{P_{mag}} + \frac{3}{2} M \omega_E Im \left[ \left( \vec{i}_R e^{j\theta_E} \right)^* \vec{i}_S \right] \quad (2.29)$$

Na equação acima, identificamos dois termos:  $p_{ohm}$  é a parcela da potência elétrica da máquina dissipada na forma de perdas ôhmicas devido às resistências elétricas dos enrolamentos do estator, enquanto  $p_{mag}$  é a parcela que é armazenada no motor na forma de campos magnéticos, potência essa que não é dissipada, podendo posteriormente ser convertida. Para compreendermos o significado físico da última parcela da equação, que chamaremos de  $p_{em}$ , substituiremos  $\omega_E = \frac{P}{2}\omega_R$ :

$$p_{el} = \omega_R \frac{3P}{2} \operatorname{MIm} \left[ \vec{i}_S \left( \vec{i}_R e^{j\theta_E} \right)^* \right] \quad (2.30)$$

onde reconhecemos os últimos termos pela equação 2.22: é o torque eletromagnético desenvolvido pelo motor:

$$p_{el} = \omega_R T_e \quad (2.31)$$

ou seja, a última parcela da equação da potência elétrica corresponde à potência mecânica desenvolvida pela máquina.

### 2.1.6 Circuito elétrico equivalente

As equações deduzidas até agora envolvem vetores espaciais que são dados nos referenciais próprios do estator e do rotor. A fim de podermos elaborar o circuito equivalente por fase do motor, expressaremos essas grandezas num referencial que gira em relação ao estator. Temos assim que:

$$\begin{cases} \vec{v}_S^a = \vec{v}_S e^{-j\theta_a} \\ \vec{i}_S^a = \vec{i}_S e^{-j\theta_a} \\ \vec{\lambda}_S^a = \vec{\lambda}_S e^{-j\theta_a} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_R^a = \vec{v}_R e^{-j(\theta_a - \theta_E)} \\ \vec{i}_R^a = \vec{i}_R e^{-j(\theta_a - \theta_E)} \\ \vec{\lambda}_R^a = \vec{\lambda}_R e^{-j(\theta_a - \theta_E)} \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\theta_a = \int_0^t \omega_a(\xi) d\xi + \theta_{a0}$$

A derivada temporal do enlace de fluxo de estator e rotor ficam na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_S &= \frac{d}{dt} \left( \vec{\lambda}_S^a e^{j\theta_a} \right) = \frac{d\vec{\lambda}_S^a}{dt} e^{j\theta_a} + j\omega_a \vec{\lambda}_S^a e^{j\theta_a} \\ \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_R &= \frac{d}{dt} \left( \vec{\lambda}_R^a e^{j(\theta_a - \theta_E)} \right) = \frac{d\vec{\lambda}_R^a}{dt} e^{j(\theta_a - \theta_E)} + j(\omega_a - \omega_E) \vec{\lambda}_R^a e^{j(\theta_a - \theta_E)} \end{aligned}$$

Substituindo na equação 2.18:

$$\begin{aligned} \vec{v}_S^a e^{j\theta_a} &= r_S \vec{i}_S^a e^{j\theta_a} + \frac{d\vec{\lambda}_S^a}{dt} e^{j\theta_a} + j\omega_a \vec{\lambda}_S^a e^{j\theta_a} \\ \vec{v}_S^a &= r_S \vec{i}_S^a + \frac{d\vec{\lambda}_S^a}{dt} + j\omega_a \vec{\lambda}_S^a \end{aligned}$$

e na equação 2.19:

$$\begin{aligned} \vec{v}_R^a e^{j(\theta_a - \theta_E)} &= r_R \vec{i}_R^a e^{j(\theta_a - \theta_E)} + \frac{d\vec{\lambda}_R^a}{dt} e^{j(\theta_a - \theta_E)} + j(\omega_a - \omega_E) \vec{\lambda}_R^a e^{j(\theta_a - \theta_E)} \\ \vec{v}_R^a &= r_R \vec{i}_R^a + \frac{d\vec{\lambda}_R^a}{dt} + j(\omega_a - \omega_E) \vec{\lambda}_R^a \end{aligned}$$

A relação entre as correntes e os enlaces de fluxo, expressa na equação matricial 2.12, fica na forma:

$$\begin{pmatrix} \vec{\lambda}_S^a e^{j\theta_a} \\ \vec{\lambda}_R^a e^{j(\theta_a - \theta_E)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_S & M e^{j\theta_E} \\ M e^{-j\theta_E} & L_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_S^a e^{j\theta_a} \\ \vec{i}_R^a e^{j(\theta_a - \theta_E)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\lambda}_S^a \\ \vec{\lambda}_R^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_S & M \\ M & L_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_S^a \\ \vec{i}_R^a \end{pmatrix}$$

Assim, as tensões de estator e rotor podem ser expressas por:

$$\vec{v}_S^a = r_S \vec{i}_S^a + j\omega_a \vec{\lambda}_S^a + \frac{d}{dt} \left( L_S \vec{i}_S^a + M \vec{i}_R^a \right) \quad (2.33)$$

$$\vec{v}_R^a = r_R \vec{i}_R^a + j(\omega_a - \omega_E) \vec{\lambda}_R^a + \frac{d}{dt} \left( M \vec{i}_S^a + L_R \vec{i}_R^a \right) \quad (2.34)$$

Pelas definições das indutância próprias ( 2.8 e 2.9), temos que:

$$\vec{v}_S^a = r_S \vec{i}_S^a + j\omega_a \vec{\lambda}_S^a + \frac{d}{dt} \left[ L_{Sl} \vec{i}_S^a + M(\vec{i}_R^a + \vec{i}_S^a) \right]$$

$$\vec{v}_R^a = r_R \vec{i}_R^a + j(\omega_a - \omega_E) \vec{\lambda}_R^a + \frac{d}{dt} \left[ L_{Rl} \vec{i}_R^a + M(\vec{i}_R^a + \vec{i}_S^a) \right]$$

Decompondo as tensões e as correntes em suas partes reais (ditas de *eixo direto*, notadas com o índice  $d$ ) e imaginárias (ditas de *eixo de quadratura*, notadas com o índice  $q$ ):

$$v_{Sd}^a = r_S i_{Sd}^a - \omega_a \lambda_{Sq}^a + L_{Sl} \frac{d}{dt} i_{Sd}^a + M \frac{d}{dt} (i_{Rd}^a + i_{Sd}^a)$$

$$v_{Sq}^a = r_S i_{Sq}^a + \omega_a \lambda_{Sd}^a + L_{Sl} \frac{d}{dt} i_{Sq}^a + M \frac{d}{dt} (i_{Rq}^a + i_{Sq}^a)$$

$$v_{Rd}^a = r_R i_{Rd}^a - (\omega_a - \omega_E) \lambda_{Rq}^a + L_{Rl} \frac{d}{dt} i_{Rd}^a + M \frac{d}{dt} (i_{Rd}^a + i_{Sd}^a)$$

$$v_{Rq}^a = r_R i_{Rq}^a + (\omega_a - \omega_E) \lambda_{Rd}^a + L_{Rl} \frac{d}{dt} i_{Rq}^a + M \frac{d}{dt} (i_{Rq}^a + i_{Sq}^a)$$

A equação do torque nesse referencial pode ser obtida a partir de 2.22:

$$T_e = \frac{3P}{2} M \text{Im} \left[ \vec{i}_S^a e^{j\theta_a} \left( \vec{i}_R^a e^{j\theta_a - \theta_E} e^{j\theta_E} \right)^* \right]$$

$$T_e = \frac{3P}{2} M \text{Im} \left[ \vec{i}_S^a \vec{i}_R^{a*} \right] \quad (2.35)$$

uma vez que:

$$\vec{\lambda}_S^a = L_S \vec{i}_S^a + M \vec{i}_R^a \longrightarrow \vec{i}_R^a = \frac{1}{M} \vec{\lambda}_S^a - \frac{L_S}{M} \vec{i}_S^a$$

temos:

$$T_e = \frac{3P}{2} M \text{Im} \left[ \vec{i}_S^a \left( \frac{1}{M} \vec{\lambda}_S^a - \frac{L_S}{M} \vec{i}_S^a \right)^* \right]$$

$$= \frac{3P}{2} M \text{Im} \left[ \vec{i}_S^a \frac{1}{M} \vec{\lambda}_S^{a*} - \frac{L_S}{M} \left\| \vec{i}_S^a \right\|^2 \right]$$

Sendo nula a parte imaginária de um número real, temos que:

$$T_e = \frac{3P}{2} \operatorname{Im} \left[ \vec{i}_S^a \vec{\lambda}_S^{a*} \right] \quad (2.36)$$

### 2.1.7 Operação em regime permanente

Na elaboração do circuito elétrico equivalente, nós não fizemos nenhuma hipótese sobre a velocidade angular  $\omega_a$  do referencial girante, de modo que podemos escolher seu valor ao longo do tempo arbitrariamente para em seguida calcular a posição de referência a partir de 2.32.

Suponhamos que os enrolamentos da máquina sejam alimentados com tensões e correntes de frequência constante. Nesse caso, nos é conveniente escolher a velocidade angular do referencial girante constante ao longo do tempo e igual à frequência elétrica de alimentação  $\Omega$ . Esse referencial será chamado de *síncrono* e sua posição de referência assume uma forma linear com o tempo:

$$\theta_s = \Omega t + \theta_{s0}$$

As equações 2.33 e 2.34 ficam na forma:

$$\begin{aligned} \vec{v}_S^s &= r_S \vec{i}_S^s + j\Omega \vec{\lambda}_S^s + \frac{d}{dt} \left( L_S \vec{i}_S^s + M \vec{i}_R^s \right) \\ \vec{v}_R^s &= r_R \vec{i}_R^s + j(\Omega - \omega_E) \vec{\lambda}_R^s + \frac{d}{dt} \left( M \vec{i}_S^s + L_R \vec{i}_R^s \right) \end{aligned}$$

Escrevendo as tensões em função unicamente das correntes, temos que:

$$\begin{aligned} \vec{v}_S^s &= r_S \vec{i}_S^s + j\Omega \left( L_S \vec{i}_S^s + M \vec{i}_R^s \right) + \frac{d}{dt} \left( L_S \vec{i}_S^s + M \vec{i}_R^s \right) \\ \vec{v}_R^s &= r_R \vec{i}_R^s + j(\Omega - \omega_E) \left( M \vec{i}_S^s + L_R \vec{i}_R^s \right) + \frac{d}{dt} \left( M \vec{i}_S^s + L_R \vec{i}_R^s \right) \end{aligned}$$

Considerando a operação da máquina em regime permanente, temos que as derivas temporais se anulam ( $\frac{d}{dt} \rightarrow 0$ ) e que os vetores espaciais estão todos sincronizados numa dada frequência, o que nos permite escrevê-los na forma de fasores:

$$\begin{aligned} \hat{V}_S &= r_S \hat{I}_S + j\Omega \left( L_S \hat{I}_S + M \hat{I}_R \right) \\ \hat{V}_R &= r_R \hat{I}_R + j(\Omega - \omega_E) \left( M \hat{I}_S + L_R \hat{I}_R \right) \end{aligned}$$

Substituindo as indutâncias próprias (equações 2.8 e 2.9):

$$\hat{V}_S = r_S \hat{I}_S + j\Omega L_{Sl} \hat{I}_S + j\Omega M \left( \hat{I}_R + \hat{I}_S \right) \quad (2.37)$$

$$\hat{V}_R = r_R \hat{I}_R + j(\Omega - \omega_E) L_{Rl} \hat{I}_R + j(\Omega - \omega_E) M \left( \hat{I}_R + \hat{I}_S \right) \quad (2.38)$$

Na equação da tensão de rotor, dividiremos os dois lados por  $\Omega - \omega_E$  e multiplicaremos por  $\Omega$ :

$$\frac{\Omega}{\Omega - \omega_E} \hat{V}_R = \frac{\Omega}{\Omega - \omega_E} r_R \hat{I}_R + j\Omega L_{Rl} \hat{I}_R + j\Omega M \left( \hat{I}_R + \hat{I}_S \right)$$

Seja  $s$  o escorregamento da máquina, definido como:

$$s = \frac{\Omega - \omega_E}{\Omega} \quad (2.39)$$

temos que:

$$\frac{\hat{V}_R}{s} = \frac{r_R}{s} \hat{I}_R + j\Omega L_{Rl} \hat{I}_R + j\Omega M (\hat{I}_R + \hat{I}_S) \quad (2.40)$$

Seja  $X_{Rl} = \Omega L_{Rl}$  a reatância de dispersão do rotor,  $X_{Sl} = \Omega L_{Sl}$  a reatância de dispersão do estator e  $X_M = \Omega M$  a reatância mútua para um dado valor de  $\Omega$ , as equações 2.37 e 2.40 ficam na forma:

$$\hat{V}_S = r_S \hat{I}_S + jX_{Sl} \hat{I}_S + jX_M (\hat{I}_R + \hat{I}_S) \quad (2.41)$$

$$\frac{\hat{V}_R}{s} = \frac{r_R}{s} \hat{I}_R + jX_{Rl} \hat{I}_R + jX_M (\hat{I}_R + \hat{I}_S) \quad (2.42)$$

O torque desenvolvido pela máquina é obtido a partir da equação 2.35 e fica na forma:

$$T_e = \frac{3P}{2} \frac{X_M}{\Omega} \text{Im} [\hat{I}_S \hat{I}_R^*] \quad (2.43)$$

## 2.1.8 Orientação de campo

Assim como foi dito no início da seção 2.1.7, a velocidade angular do referencial girante pode ser escolhida de forma arbitrária. Além do referencial síncrono, há uma outra escolha de  $\omega_a$  que nos permite obter resultados interessantes.

Seja  $\omega_e$  uma função que para cada instante de tempo ela nos dê uma velocidade angular tal que o enlace de fluxo de rotor escrito num referencial que gira a essa velocidade não tenha parte imaginária.

$$\text{Im} [\vec{\lambda}_R^e] = \text{Im} [\vec{\lambda}_R e^{-j\theta_e(t)}] = \text{Im} [\vec{\lambda}_R e^{-j[\int_0^t \omega_e(\xi) d\xi + \theta_{e0}]}] = 0$$

ou seja, o vetor espacial do enlace de rotor nesse referencial está alinhado com o eixo real.

$$\vec{\lambda}_R^e = \|\vec{\lambda}_R^e\| \quad (2.44)$$

A partir da expressão da tensão de rotor nesse referencial:

$$\vec{v}_R^e = r_R \vec{i}_R^e + \frac{d\vec{\lambda}_R^e}{dt} + j(\omega_e - \omega_E) \vec{\lambda}_R^e$$

e da relação entre as correntes e enlaces de fluxo de rotor:

$$\vec{\lambda}_R^e = M \vec{i}_S^e + L_R \vec{i}_R^e \longrightarrow \vec{i}_R^e = \frac{1}{L_R} \vec{\lambda}_R^e - \frac{M}{L_R} \vec{i}_S^e \quad (2.45)$$

Temos que:

$$\vec{v}_R^e = r_R \left( \frac{1}{L_R} \vec{\lambda}_R^e - \frac{M}{L_R} \vec{i}_S^e \right) + \frac{d\vec{\lambda}_R^e}{dt} + j(\omega_e - \omega_E) \vec{\lambda}_R^e$$

$$\vec{v}_R^e + M \frac{r_R}{L_R} \vec{i}_S^e = \left[ \frac{r_R}{L_R} + j(\omega_e - \omega_E) + \frac{d}{dt} \right] \vec{\lambda}_R^e$$

pela definição da orientação de fluxo de rotor ( 2.44) e introduzindo a *constante de tempo rotórica*  $\tau_R = \frac{L_R}{r_R}$ :

$$\vec{v}_R^e + \frac{M}{\tau_R} \vec{i}_S^e = \left[ \frac{1}{\tau_R} + j(\omega_e - \omega_E) + \frac{d}{dt} \right] \|\vec{\lambda}_R^e\|$$

Decompondo a equação em sua parte real e imaginária

$$v_{Rd}^e + \frac{M}{\tau_R} i_{Sd}^e = \left[ \frac{1}{\tau_R} + \frac{d}{dt} \right] \|\vec{\lambda}_R^e\| \quad (2.46)$$

$$v_{Rq}^e + \frac{M}{\tau_R} i_{Sq}^e = (\omega_e - \omega_E) \|\vec{\lambda}_R^e\| = s\omega_e \|\vec{\lambda}_R^e\| \quad (2.47)$$

O torque desenvolvido pela máquina é obtido a partir da equação 2.35 e fica na forma:

$$T_e = \frac{3P}{2} \frac{M}{2} \text{Im} \left[ \vec{i}_S^e \vec{i}_R^{e*} \right]$$

substituindo a corrente de rotor pela expressão obtida em 2.45:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{3P}{2} \frac{M}{2} \text{Im} \left[ \vec{i}_S^e \left( \frac{1}{L_R} \vec{\lambda}_R^e - \frac{M}{L_R} \vec{i}_S^e \right)^* \right] \\ &= \frac{3P}{2} \frac{M}{2} \text{Im} \left[ \frac{1}{L_R} \vec{i}_S^e \vec{\lambda}_R^{e*} - \frac{M}{L_R} \|\vec{i}_S^e\|^2 \right] \end{aligned}$$

Sendo nula a parte imaginária de um número real, temos que:

$$T_e = \frac{3P}{2} \frac{M}{L_R} \text{Im} \left[ \vec{i}_S^e \vec{\lambda}_R^{e*} \right] \quad (2.48)$$

mais uma vez aplicando a definição da orientação de fluxo de rotor ( 2.44) e sabendo que o conjugado de um número real é o próprio número, temos que:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{3P}{2} \frac{M}{L_R} \text{Im} \left[ \vec{i}_S^e \|\vec{\lambda}_R^e\|^* \right] \\ &= \frac{3P}{2} \frac{M}{L_R} \|\vec{\lambda}_R^e\| \text{Im} \left[ \vec{i}_S^e \right] \end{aligned}$$

logo:

$$T_e = \frac{3P}{2} \frac{M}{L_R} \|\vec{\lambda}_R^e\| i_{Sq}^e \quad (2.49)$$

As equações 2.46, 2.47 e 2.49 nos dizem que:

- A corrente de estator ou tensão de rotor aplicada no eixo direto desse referencial cria um enlace de fluxo de rotor que varia com uma dinâmica de primeira ordem e constante de tempo  $\tau_r$ ;
- Havendo escorregamento, há circulação de correntes de estator e tensão de rotor no eixo de quadratura;
- Havendo correntes de eixo de quadratura e enlace de fluxo de rotor, há um torque que é proporcional ao produto dessas duas grandezas.

## Capítulo 3

# Condicionamento e controle

Living off the grid and being kind of an outlaw brings a dangerous reality.

Ron Perlman

Vimos no final da primeira parte que o torque desenvolvido pela turbina depende da velocidade com ela gira, de maneira que a potência extraída da fonte primária depende da velocidade de operação do grupo turbo-gerador. Vimos também que existem a dinâmica dessa fonte de energia muda ao longo do tempo, de modo que a condição ótima de operação do sistema pode mudar com tempo. Assim, para a obtenção de uma maior eficiência, seria interessante que o sistema convertesse energia mecânica em elétrica, sem restrição da velocidade de trabalho.

### 3.0.9 Velocidade constante

A utilização do gerador de indução com rotor de gaiola (SCIG<sup>1</sup>) nos dá uma certa flexibilidade na operação do sistema de geração uma vez que a máquina não gira a uma rotação constante (figura 3.1). Contudo, essa velocidade não pode se distanciar muito da frequência síncrona do gerador, algo que é ilustrado pela curva de torque em função da rotação: a diferença relativa entre essas duas velocidades (o escorregamento) varia dentro de uma faixa muito estreita.

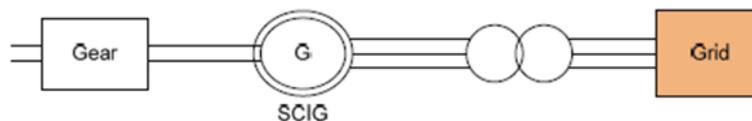


Figura 3.1: Gerador de indução com rotor em gaiola diretamente conectado à rede

Uma maneira de aumentar a faixa de escorregamento com a qual o sistema trabalha seria utilizar um gerador de indução com rotor bobinado (WRIG<sup>2</sup>) onde a pudéssemos alterar a resistência dos enrolamentos de rotor, deslocando assim a inclinação da curva velocidade-conjugado, ampliando a faixa de escorregamento (figura 3.2). Contudo, esse método aumentaria a dissipação de potência no circuito, reduzindo a eficiência, além de que a máquina com rotor bobinado é mais cara e requer uma manutenção frequente das escovas que fazem o contato elétrico com os enrolamentos do rotor.

<sup>1</sup>em inglês, *squirrel cage induction generator*.

<sup>2</sup>em inglês, *wound rotor induction generator*.

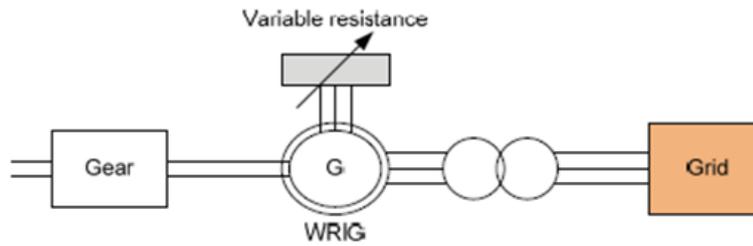


Figura 3.2: Gerador de indução com rotor bobinado e controle da resistência dos enrolamentos de rotor

## 3.1 Sistema de geração com velocidade variável

### 3.1.1 Velocidade variável com passos discretos

Uma vez fixada a frequência da rede à qual o gerador está conectado, podemos alterar a frequência síncrona trabalhando sobre o número de pólos da máquina: mudando a maneira como são feitas as conexões dos enrolamentos, podemos multiplicar ou dividir por um número inteiro essa velocidade. O problema desse método é que ele permite a obtenção de passos discretos de velocidade e em contrapartida elevam consideravelmente o custo e complexidade do sistema, além de ter uma eficiência reduzida.

Tal resultado também poderia ser obtido através de um sistema mecânico, como um caixa de engrenagens ou uma transmissão hidráulica, porém mais uma vez teríamos uma variação com passos discretos, elevados perdas e custos com manutenção devido ao atrito.

### 3.1.2 Velocidade variável com passos contínuos - conversão eletrônica

Com o advento da eletrônica de potência, conversor estáticos podem realizar o controle da máquina para que esta opere sempre a uma velocidade desejada (aquela com que seja possível a extração da maior quantidade possível de energia do sistema) e ao mesmo tempo adequar a injeção da potência elétrica gerada para a frequência da rede.

Como exemplos desse tipo de sistema, temos o gerador de indução duplamente alimentado (DFIG<sup>3</sup>) onde, assim como no gerador com rotor bobinado, temos contato elétrico com os enrolamentos do rotor, de modo que podemos sintetizar eletronicamente tensões e correntes nesses enrolamentos, de modo que a frequência gerada seja compatível com a da rede (figura 3.3).

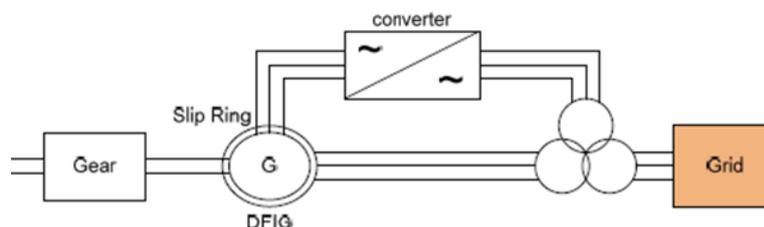


Figura 3.3: Gerador de indução duplamente alimentado

Finalmente, temos o sistema da figura 3.4, onde um gerador de indução com rotor de gaiola ou um gerador síncrono com ímã permanentes (PMSG<sup>4</sup>) é conectado à rede através de conversor AC-DC-AC que funciona como retificador da potência gerada pela máquina e que em seguida a reinjeta na rede em sua frequência.

<sup>3</sup>em inglês, *double fed induction generator*.

<sup>4</sup>em inglês, *permanent magnet synchronous generator*.

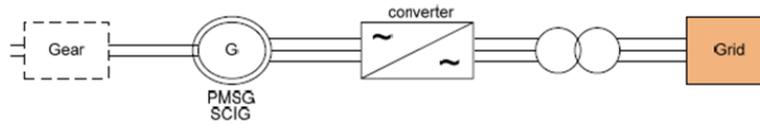


Figura 3.4: Gerador de indução ou gerador síncrono conectado à rede por um conversor eletrônico

A vantagem é que ambas máquinas são robustas, confiáveis e mais baratas uma vez que não precisamos ter acesso ao enrolamentos do rotor. No que se segue, analisaremos o sistema de conversão trabalhando com o gerador de indução.

### 3.1.3 Conversor AC-DC-AC

O sistema da figura 3.4 é detalhado na figura 3.5. Ele funciona da seguinte maneira:

1. O retificador PWM converte a potência gerada pela máquina em tensão contínua;
2. O inversor PWM converte a tensão contínua em alternada na frequência da rede;
3. O capacitor do barramento DC intermedia a transferência de potência entre os dois sistemas.

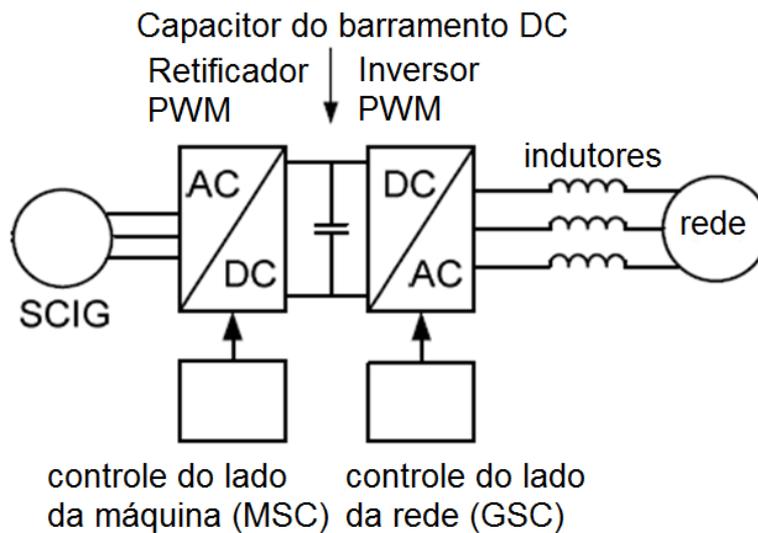


Figura 3.5: Gerador de indução com rotor bobinado conectado à rede por um conversor AC-DC-AC

O fato de o sistema utilizar um retificador PWM permite obter um controle mais apurado do funcionamento da máquina: podemos através de controle vetorial controlar o fluxo de magnetização e a velocidade de operação do gerador de modo que a potência extraída seja a maior possível. Do lado da rede, o inversor PWM permite o controle da potência ativa e reativa enviada a rede, sendo que a potência ativa está relacionada com o nível de tensão DC que é mantido no capacitor do barramento.

Nesse tipo de sistema, pode haver fluxo de potência nos dois sentidos, ou seja, o gerador pode eventualmente operar como motor consumindo energia da rede. Essa funcionalidade é interessante para o melhor aproveitamento da fonte de energia primária: numa eventual mudança brusca da fonte de potência mecânica (no nosso caso, uma mudança repentina do regime das ondas do mar) pode ser interessante motorizar temporariamente a máquina de

modo que este entre num estado onde a extração de potência seja mais feita de maneira mais eficiente. A energia gasta com a motorização será em seguida devolvida a rede (maior parte dela terá sido armazenada seja na forma de energia cinética inercial do sistema mecânico, seja na forma de campos magnéticos no gerador, seja na forma de campo elétrico no capacitor) sendo que nesse meio tempo aproveitou-se das condições mais favoráveis da produzir-se mais energia.

### 3.1.4 Análise desacoplada

Há uma troca constante de energia entre o capacitor do barramento DC e o sistema mecânico da turbina e do gerador: quando ocorre uma redução na referência de velocidade do sistema mecânico, há uma transferência da energia cinética do sistema para o capacitor, com consequente elevação da tensão do barramento, e quando o inverso ocorre, ou seja, quando há uma elevação na referência de velocidade, há uma redução na tensão do barramento. De maneira a dimensionar o capacitor para que ele suporte essas eventuais mudanças, utiliza-se a fórmula[15]:

$$C = J \frac{\omega_{max}^2 - (0,8\omega_{max})^2}{E_{max}^2 - E_{ref}^2} \quad (3.1)$$

nela, vemos que estamos admitindo uma variação de até 20% de velocidade de rotação. Se o valor da capacitância for maior que o calculado pela fórmula acima, as variações de tensão serão cada vez menores, porém isso também fará com que o sistema demore mais para carregar o capacitor durante a partida, o que comprometerá seu desempenho nesses instantes.

No que se segue, suporemos que o valor da capacitância desse circuito é muito maior que o valor indicado na fórmula 3.1. Assim sendo, em nossa modelização ele poderá ser considerado como um gerador de tenso ideal (pois o valor do ripple de tenso será muito pequeno).

Com essa hipótese, poderemos analisar separadamente o inversor do lado da rede (GSC) daquele do lado do mquina (MSC).

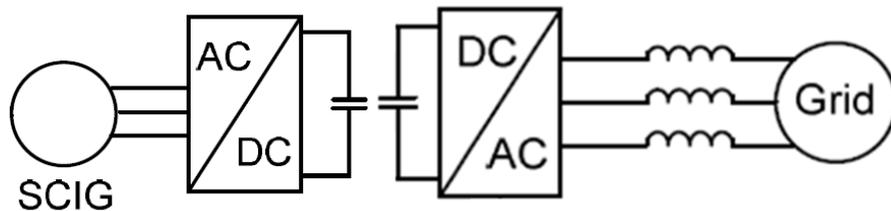


Figura 3.6: Análise desacoplada

### 3.1.5 Controle do gerador de indução

O controlador do lado da máquina de indução é exibido na figura 3.7.

A partir dos valores de referência da corrente de magnetização, o controlador ajusta o valor do fluxo magnético no motor enquanto que a fonte primária nos indica qual deve ser a velocidade  $\omega_{ref}$  para a qual a extração de potência será otimizada, fazendo que o controlador de torque atue de maneira a obter essa velocidade. Transformando as correntes do referencial do fluxo do rotor para o referencial fixo do estator, temos as referências de correntes para cada uma das três fases, que do controlador repassa para o retificador PWM. Todo sistema funciona como um motor operando segundo orientação de campo, porém com fluxo de potência invertido.

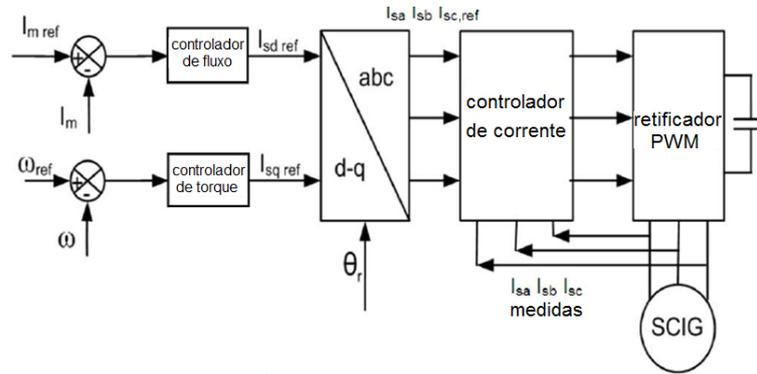


Figura 3.7: Controle do gerador de indução

### 3.1.6 Controle do conversor conectado à rede

O controlador do conversor conectado à rede é exibido na figura 3.8.

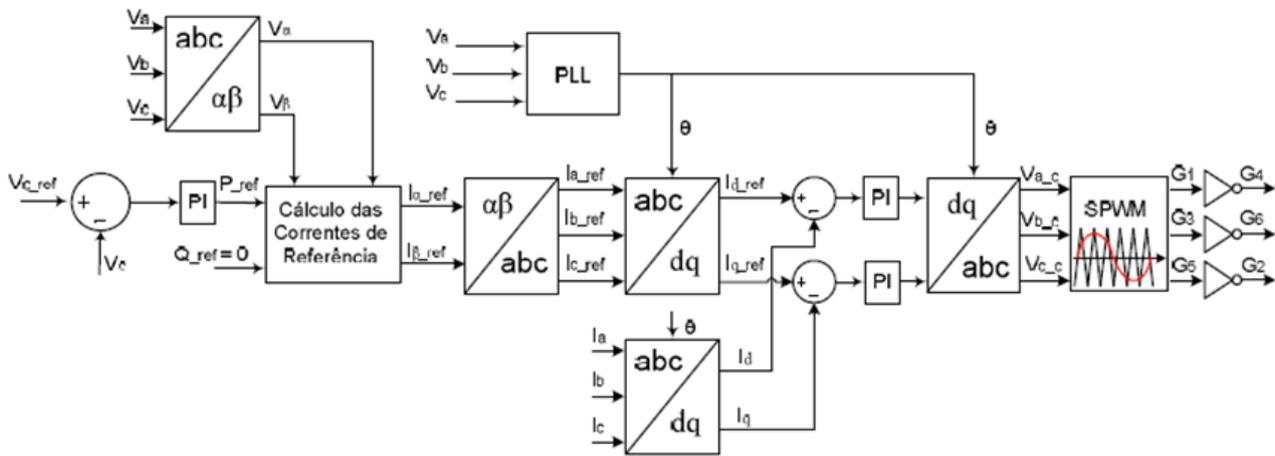


Figura 3.8: Controle do conversor conectado à rede

Dois laços de controle baseados na teoria instânea das potências [16] trabalham em paralelo, controlando a potência ativa e reativa independentemente.

$$P_{ref} = V_{\alpha} I_{\alpha,ref} + V_{\beta} I_{\beta,ref}$$

$$Q_{ref} = V_{\alpha} I_{\beta,ref} - V_{\beta} I_{\alpha,ref}$$

$$\begin{pmatrix} P_{ref} \\ Q_{ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\alpha} & V_{\beta} \\ -V_{\beta} & V_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\alpha,ref} \\ I_{\beta,ref} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{\alpha,ref} \\ I_{\beta,ref} \end{pmatrix} = \frac{1}{V_{\alpha}^2 + V_{\beta}^2} \begin{pmatrix} V_{\alpha} & -V_{\beta} \\ V_{\beta} & V_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{ref} \\ Q_{ref} \end{pmatrix}$$

O controle da potência ativa é utilizado para controlar a tensão na barramento DC enquanto que a potência reativa será mantida em zero (fator de potência unitário). Uma vez obtidos os valores de referência para as correntes, o controlador compara esse valor com o valor medido, faz a transformação para o referencial abc onde os sinais serão comparados com as portadoras triangulares do método PWM senoidal.

# Capítulo 4

## Simulações

Nothing is too wonderful to be true if it be consistent with the laws of nature.

---

Michael Faraday

A seguir, apresentamos os resultados de algumas simulações realizadas de modo a avaliarmos o comportamento dos sistemas acima descritos. Os valores dos parâmetros utilizados estão indicados nas tabelas abaixo:

V (V)	p (kW)	f(Hz)	P	$r_s$ (p.u.)	$L_{sl}$ (p.u.)	$L_m$ (p.u.)	$r_r$ (p.u.)	$L_{rl}$ (p.u.)
400	37	60	4	0,0062	0,0447	2,5482	0,0115	0,0550

Tabela 4.1: Parâmetros do gerador

p (kW)	n	r (m)	a ( $m^2$ )	b (m)	l (m)
45	8	0,7285	1,1763	0,4	0,38

Tabela 4.2: Parâmetros da turbina

J ( $kg.m^2$ )	$\frac{\omega_g}{\omega_t}$
50	2

Tabela 4.3: Parâmetros do grupo turbo-gerador

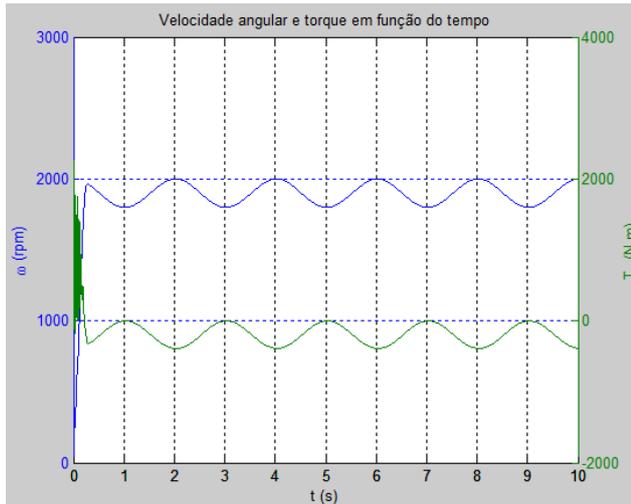
### 4.1 Gerador de indução com rotor em gaiola diretamente conectado à rede

Para o gerador conectado diretamente a rede, considerando que esta é um fonte de tensão ideal, e para uma excitação de torque nominal da turbina com frequência de  $0,5Hz$ , obtemos seguintes resultados:

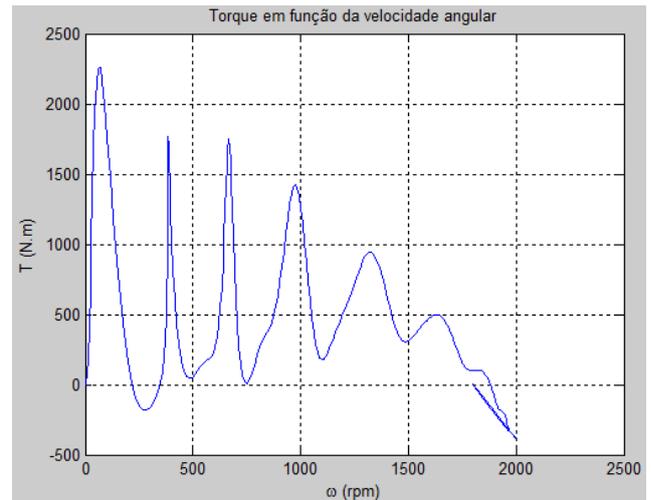
## 4.2 Gerador de indução com rotor em gaiola conectado à rede através de um conversor AC/DC/AC

### 4.2.1 Conversor do lado da rede

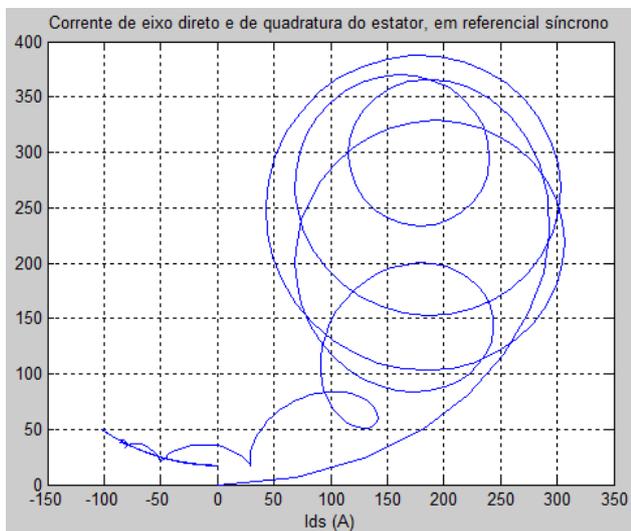
O inversor opera com frequência de chaveamento  $f_s = 2500Hz$ .



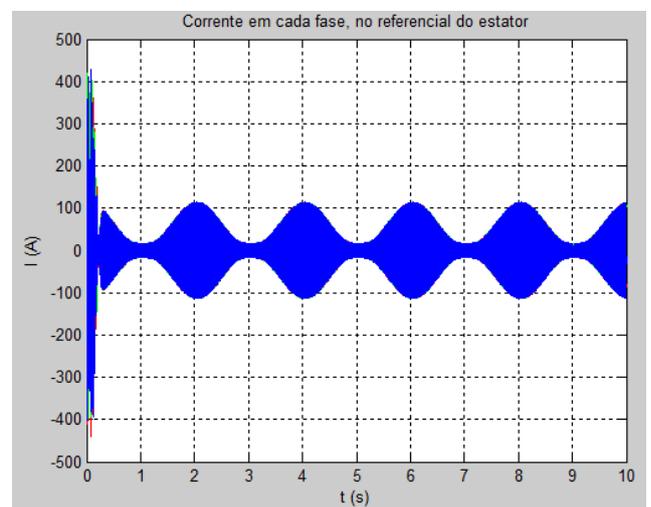
(a) Torque e velocidade angular em função do tempo



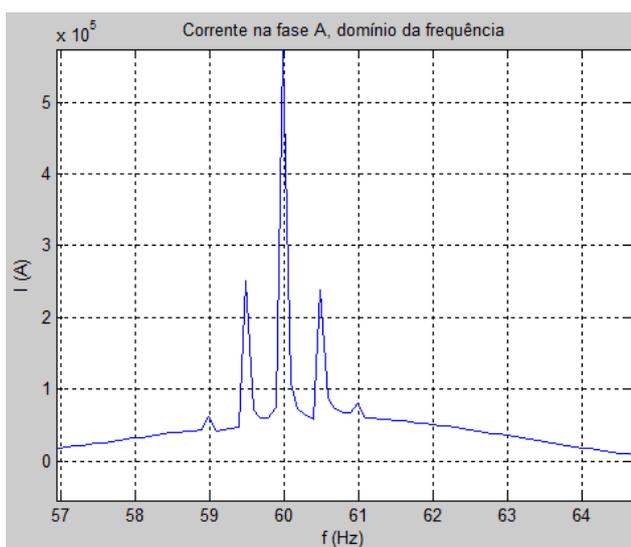
(b) Torque em função da velocidade angular



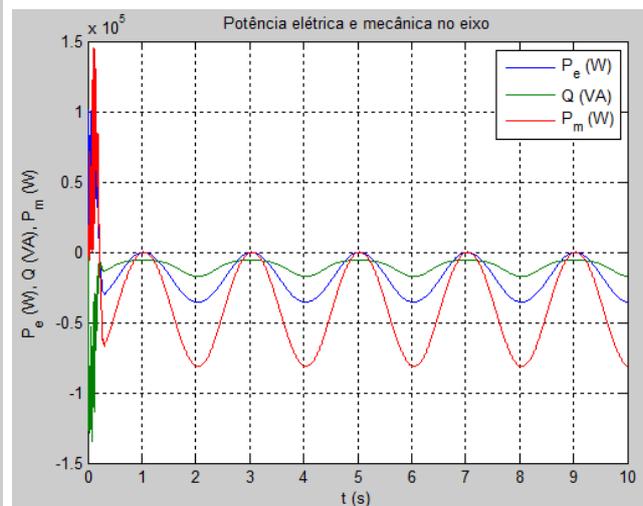
(c) Corrente de eixo direto e de quadratura



(d) Correntes por fase



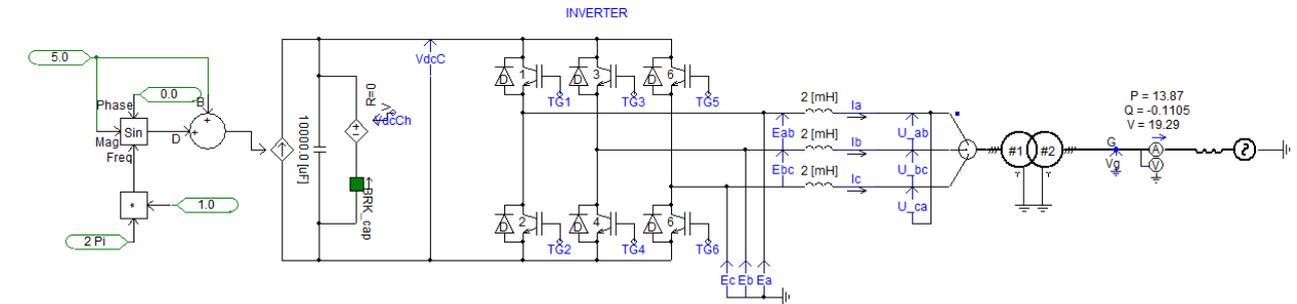
(e) Corrente da fase A, domínio da frequência



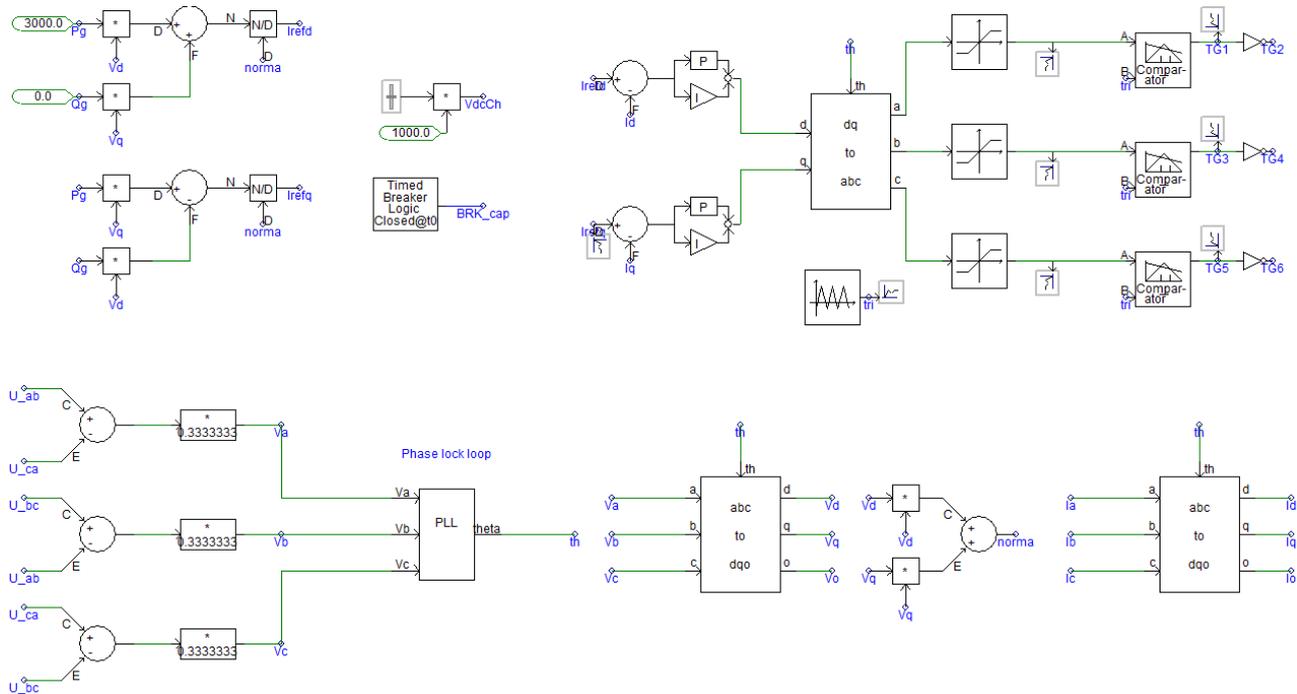
(f) Potência mecânica, ativa e reativa

Figura 4.1: Exemplos de sistema de conversão da energia dos mares

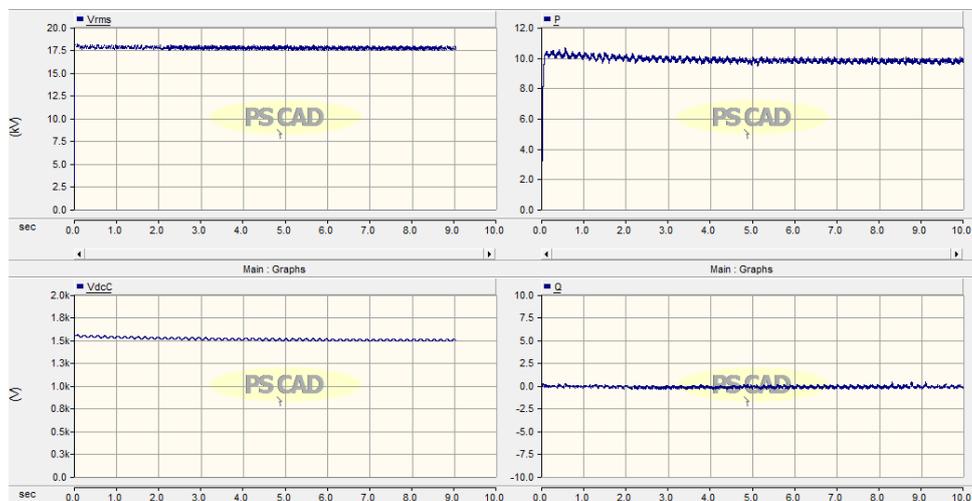
OWC wave power generation system  
Variable speed conversion - grid connected inverter



(a) Sistema



(b) Controle



(c) Tensão de linha na rede, tensão no barramento DC, potência ativa e reativa

Figura 4.2: Conversor do lado da rede

# Capítulo 5

## Conclusão

A energia das ondas é uma das várias formas de se produzir energia elétrica a partir da energia dos mares e oceanos. Como vimos, ela é uma fonte renovável, previsível e acessível a quase todos os países.

Dentre as máquinas elétricas, nossa análise focou na máquina de indução devido à sua versatilidade. Em particular, a versão com rotor em gaiola é robusta e confiável e, graças à orientação de campo, ela pode ser controlada de uma maneira similar ao controle da máquina de corrente contínua.

O condicionamento da energia com conversor estáticos permite obter um desempenho otimizado da operação do sistema uma vez que ele permite a operação em velocidade variável, faz com que haja a possibilidade de fluxo de potência nos dois sentidos, o que reduz o tempo de resposta do sistema à variações da fonte primária, e ao mesmo tempo entrega à rede uma potência constante de com nível de qualidade aceitável.

Uma análise mais prática e eventual proposta de continuação do trabalho deve levar em conta o acoplamento dos dois conversores pelo barramento DC, o estudo de funcionalidades adicionais ao conversores (e.g. supressões de harmônicos), uma modelização ainda mais detalhada da fonte primária e o estudo do comportamento do sistema frente a situações de contingência (e.g. faltas).

---

## Referências Bibliográficas

- [1] Feynman RP, Leighton RB & Sands M 1989, “The Feynman Lectures on Physics Vol. 1” (Reading MA: Addison-Wesley) pp 51/7-51/10.
- [2] Figura 6 de: Wiegel, R.L.; Johnson, J.W. (1950), “Elements of wave theory”, Proceedings 1st International Conference on Coastal Engineering, Long Beach, California: ASCE, pp. 521
- [3] Le Méhauté, B., “An introduction to hydrodynamics and water waves”, Springer, 1976
- [4] H. Polinder and M. Scuotto, “Wave energy converters and their impact on power systems”, in Proc. International Conference on Future Power Systems, Amsterdam, The Netherlands, 2005, pp. 62-70, 2005
- [5] Aqua-RET - Aquatic Renewable Energy Technologies - Disponível em: <http://www.aquaret.com/>. Acesso em: 14 de maio de 2013.
- [6] Tesla N & Johnston B, “My Inventions: The Autobiography of Nikola Tesla”, Electrical Experimenter magazine, 1919.
- [7] Machado, I.R.; Watanabe, E.H. et al. “Wave energy conversion system using asynchronous generators - a comparative study”, Power Electronics Conference (COBEP), 2011.
- [8] Hodgins, N. et al. “Measurement and modelling of induction generator performance in an Oscillating Water Column wave energy converter”, 4th IET Conference on Power Electronics, Machines and Drives, 2008.
- [9] Alberdi, M. et al. “Control of Oscillating Water Column-based wave power generation plants for grid connection”, 20th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED), 2012.
- [10] European Marine Energy Centre - Disponível em: <http://www.emec.org.uk/marine-energy/wave-devices/>. Acesso em: 28 de abril 2013.
- [11] Manabu Takao and Toshiaki Setoguchi, “Air Turbines for Wave Energy Conversion”, International Journal of Rotating Machinery, Article ID 717398, 2012.
- [12] A. Brito-Melo, L.M.C. Gato and A.J.N.A. Sarmiento, “Analysis of Wells turbine design parameters by numerical simulation of the OWC performance”, Ocean Engineering, vol. 29, pp. 1463-1477, 2002.
- [13] Pierson, W. J., G. Neumann and R. W. James, 1955, “Practical Methods for Observing and Forecasting Ocean Waves by Means of Wave Spectra and Statistics”, Washington, U.S. Navy Hydrographic Office, Publication No. 603 (reprinted 1960), 284 pp.

- [14] Alberdi, M. et al., "Fault-Ride-Through Capability of Oscillating-Water-Column-Based Wave-Power-Generation Plants Equipped With Doubly Fed Induction Generator and Air-flow Control", IEEE transactions on industrial electronics, Vol. 58, No. 5, May 2011
- [15] Barbosa Bicalho, A. L. "Sistema de conversão de energia a velocidade variável". Dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em engenharia elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, 1996.
- [16] Akagi H.; E. H. Watanabe; Aredes, M.; "Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning", IEEE Press Editorial Board.